

Том 51, № 1
Март 2019

НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1995 г.

Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (01.01.00 – математика, 01.02.00 – механика, 01.04.00 – физика).

Учредитель

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Издатель

НИУ «БелГУ»
Издательский дом «Белгород»
Адрес редакции, издателя, типографии:
308015 г. Белгород, ул. Победы, 85

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77 - 73510 31.08.2018

Выходит 4 раза в год.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ЖУРНАЛА

Главный редактор серии

А.В. Носков, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической и математической физики НИУ «БелГУ»

Заместитель главного редактора

Н.В. Малай, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

Ответственный секретарь

Р.А. Загороднюк, кандидат физико-математических наук, доцент НИУ «БелГУ»

Члены редколлегии:

А. Ашыралыев, доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Ближневосточного университета (Никосия, Турция); институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан)

С.В. Блажевич, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

А.Н. Беляков, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

А.Г. Брусенцев, доктор физико-математических наук, профессор БГТУ им. В.Г. Шухова

В.Б. Васильев, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений НИУ «БелГУ»

Ю.П. Вирченко, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ
Белгородского государственного университета

Математика. Физика

Belgorod State University
Scientific Bulletin
Mathematics. Physics

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Балкизов Ж.А.
Об одной краевой задаче типа задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с тремя смещениями в гиперболической части области 5

Ларин А.А.
Краевая задача для сингулярного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной плоской области с угловыми точками на границе 15

Куликов А.Н., Куликов Д.А.
Пространственно неоднородные решения в двух краевых задачах для уравнения Кана-Хиллиарда 21

Букушева А.В.
Классификация почти контактных метрических структур на распределениях с внутренней симплектической связностью 33

Лукашук В.О., Кадырова К.Р.
Инвариантные системы трёх обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка одной шестимерной алгебры Ли 41

Оруджев Э.Г., Алиев С.А.
Исследование спектра и резольвенты одного дифференциального пучка 4-го порядка с трехкратным характеристическим корнем 52

Щербина В.В., Сафонов В.Г.
О подрешетках решетки частично totally насыщенных формаций конечных групп 64

Попов И.П.
Разновидности резонансов в механике 88

ФИЗИКА

Савотченко С.Е.
Локализация в симметричной трехслойной структуре из дефокусирующего слоя с фокусирующими обкладками, разделенными границами с нелинейным откликом 96

Малай Н.В., Шукин Е.Р., Зинькова И.М., Шулиманова З.Л.
Особенности диффузии-и фотофоретического движения крупной слабо испаряющейся капли при малых относительных перепадах температуры 104

А.В. Глушак, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

С.Б. Дабагов, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории электронов высоких энергий ОЯФА ФИАН им. П.Н. Лебедева РАН

Д.М. Левин, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики Тульского государственного университета

О.М. Пенкин, доктор физико-математических наук, профессор Научно-образовательного центра математики и кибернетики Казахстанско-британского технического университета, Алматы, Казахстан

И.П. Половинкин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

С.М. Ситник, доктор физико-математических наук, профессор НИУ «БелГУ»

А.П. Солдатов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений НИУ «БелГУ», главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН

В.Е. Федоров, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа математического факультета Челябинского государственного университета

А.А. Шибков, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина

Выпускающий редактор *Л.П. Котенко*
Художественный редактор *О.Г. Томусяк*

Оригинал-макет *А.В. Носков*
E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Подписано в печать 27.03.2019
Формат 60×84/8
Гарнитура Times New Roman, Impact
Усл. п. л. 19,8
Заказ 80
Цена свободная
Тираж 1000 экз.
Дата выхода 31.03.2019

Подписной индекс в Объединённом каталоге «Пресса России» – 81631

Оригинал-макет подготовлен и тиражирован в Издательском доме «Белгород»

Адрес: 308015 г. Белгород, ул. Победы, 85

Мохебби Фар М.Р.

Оптическая сила вблизи лазерной подсветки конического
наконечника.....115

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Тюпин В.Н., Рубашкина Т.И.

Распределение энергии при механических процессах разрушения
трещиноватых горных пород взрывом.....121

Голочалова А.В., Кулумбаев Э.Б.

Оптимизационная модель стационарной формы эритроцита
в двумерном приближении.....135

Заболоцкий А.М.

Численное моделирование столкновения Солнечной системы
с массивными звездами145

Сведения об авторах157

Volume 51, № 1
March 2019

SCIENTIFIC REVIEWING JOURNAL

Belgorod State University
Scientific Bulletin

Mathematics. Physics

НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ

Белгородского государственного университета

Математика. Физика

Founded in 1995

The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (01.01.00 - Mathematics, 01.02.00 - Mechanics, 01.04.00 - Physics).

Founder

Federal state autonomous educational establishment of higher education «Belgorod National Research University»

Publisher

Belgorod National Research University
Belgorod Publishing House
Address of editorial office, publisher,
letterpress plant: 85 Pobeda St., Belgorod,
308015, Russia

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor)

Mass media registration certificate
ПН № ФС 77 - 73510 31.08.2018

Publication frequency: 4 /year

EDITORIAL BOARD OF JOURNAL SERIES

Chief editor

A. V. Noskov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Theoretical and Mathematical Physics (Belgorod National Research University)

Deputies of chief editor

N. V. Malay, Professor (Belgorod National Research University)

Editorial assistant

R.A. Zagorodnyuk, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, (Belgorod National Research University)

Members of editorial board:

A. Ashyralyev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Mathematic faculty of Near East University (Nicosia, Turkey), Institute of Mathematic and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

S. V. Blazhevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A. N. Belyakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A. G. Brusentsev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences Professor (Belgorod Technological University named after V. G. Shukhov)

V. B. Vasiliev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Differential Equations

CONTENTS

MATHEMATICS

Balkizov Zh.A.

On a boundary value problem of the type of the Tricomi problem for a mixed second-order parabolic-hyperbolic equation with three displacements in the hyperbolic part of the domain.....5

Larin A.A.

A boundary value problem for singular second order elliptic Equation on a bounded domain with boundary angular points 15

Kulikov A.N., Kulikov D.A.

Spatially inhomogeneous solutions in two boundary value problems for the Cahn-Hilliard equations21

Bukusheva A.V.

Classification of almost contact metric structures on distributions with internal symplectic connectivity33

Lukashchuk V.O., Kadyrova K.R.

Invariant systems of three second-order ordinary differential equations with a six-dimensional Lie algebra.....41

Orudzhev E.G., Aliev S.A

Investigation of the spectrum and resolvent of a fourth-order differential sheaf with a triple characteristic root.....52

Shcherbina V.V., Safonov V.G.

Investigation of the spectrum and resolvent of a fourth-order differential sheaf with a triple characteristic root..... 64

Popov I.P.

Variety of resonances in mechanics 88

PHYSICS

Savotchenko S.E.

Localization in a symmetric three-layer structure consisting of a defocusing layer with focusing covers separated by interfaces with a nonlinear response96

Malay N.V., Shchukin E.R., Zinkova I.M., Shulimanova Z.L

Features of diffusion-and photophoretic motion of large weakly evaporating droplet at small relative temperature differences..... 104

Mohebbifar M. R.

Optical force near a laser-illuminated tapered tip 115

U.P. Virchenko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.V. Glushak, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

S.B. Dabagov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of the Electron Laboratory high energy of Department of Nuclear Physics and Astrophysics of Physical Institute of Russian Academy of Sciences after P.N. Lebedev

D.M. Levin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics (Tula State University)

O.M. Penkin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University, Kazakh-British Technical University, Center for Mathematics and Cybernetics, Almaty, Kazakhstan)

I.P. Polovinkin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical and Applied Analysis of the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics (Voronezh State University)

S.M. Sitnik, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Belgorod National Research University)

A.P. Soldatov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Differential Equations (Belgorod National Research University), Chief Researcher of the Computing Center them. A.A. Dorodnitsyn RAS

V.E. Fedorov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Analysis of Mathematical Faculty (Chelyabinsk State University)

A.A. Shibkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics (Tambov State University after G.R. Derzhavin)

Commissioning Editor *L.P. Kotenko*
Art editor *O.G. Tomusyak*

Dummy layout by *A.V. Noskov*
E-mail: noskov_a@bsu.edu.ru

Passed for printing 27.03.2017
Format 60×84/8
Typeface Times New Roman, Impact
Printer's sheets 19,8
Order 80

Circulation 1000 copies
Date of publishing: 31.03.2019

Subscription reference in The Russian Press common catalogue – 81631

Dummy layout is replicated at Publishing House «Belgorod», Belgorod National Research University
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

MATHEMATICAL PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Tyupin V. N., Rubashkina T.I. The distribution of energy in mechanical processes of fractured destruction of rocks by explosion	121
Golochalova A.V., Kulumbaev E.B. Optimization model of the erythrocyte stationary shape in two-dimensional approximation.....	135
Zabolotskiy A.M. Numerical simulation of the encounters of the Solar system with massive stars.....	145
Information about Authors.....	157

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.956.6

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-5-14

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ СМЕЩЕНИЯМИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ОБЛАСТИ

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE TYPE OF THE TRICOMI PROBLEM FOR A MIXED SECOND-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH THREE DISPLACEMENTS IN THE HYPERBOLIC PART OF THE DOMAIN

Ж.А. Балкизов
Zh.A. Balkizov

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89-А

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
Russia, 89-A Shortanova, Nalchik, 360000

E-mail: Giraslan@yandex.ru

Аннотация

В данной работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация производных от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа с переменными коэффициентами. При определенном условии на коэффициенты, входящие в постановку задачи, решение исследуемой задачи выписано в явном виде. Показано, что при нарушении указанного условия на коэффициенты, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции.

Abstract

In this paper we study a boundary-value problem with a displacement for a nonhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic type of the second order with a wave operator in the hyperbolicity region when the linear combination of the derivatives of the values of the desired function on two characteristics and on the line of change of type with variable coefficients is given as the boundary condition. Under a certain condition, the solution of the problem under study is explicitly written down on the coefficients in the statement of the problem. It is shown that if the above condition is violated by the coefficients, the homogeneous problem corresponding to the problem under study 1 has an infinite number of linearly independent solutions, and the solution set of the corresponding nonhomogeneous problem can exist only under an additional requirement on the given functions

Ключевые слова: краевая задача со смещением, уравнение смешанного парабола-гиперболического типа, существование и единственность решения задачи.

Keywords: boundary-value problem with displacement, equation of mixed parabolic-hyperbolic type, existence and uniqueness of the solution of the problem.

Введение

Впервые краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, когда в гиперболической части границы области задана линейная комбинация значений искомой функции на двух независимых характеристиках, была сформулирована и исследована в работе Жегалова [1962]. В работах Нахушева [1969(A), (B)] было введено понятие краевой задачи со смещением и исследованы ряд нелокальных краевых задач с разными смещениями для строго гиперболических, вырождающихся гиперболических, а также смешанного типа уравнений. В отличие от задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в задачах со смещением задается нелокальное условие, связывающее значение искомого решения или его производной, вообще говоря, дробного порядка в трех точках, две из которых лежат на граничных характеристиках из разных семейств, а третья – на линии вырождения или линии изменения типа уравнения.

В монографии Нахушева [2006] отмечено, что проблема поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной, приводит к нелокальным краевым задачам со смещением. Частными случаями задач со смещением являются такие нелокальные задачи, как задача Бицадзе-Самарского [Бицадзе, Самарский, 1969], задача Дезина [Dezin, 1969], задача Карлемана [Carleman, 1932], задача Стеклова [Стеклов, 1983, с. 67], задача Франкля [Бицадзе, 1981, с. 339], и т.д.

В настоящее время исследованию краевых задач со смещением для различных типов и различных порядков уравнений уделяют внимание много авторов. В первую очередь это связано с применением их при исследовании задач биологической синергетики, трансзвуковой газовой динамики. Подобные граничные условия возникают также при изучении вопросов тепло- и массообмена в капиллярно-пористых средах, математическом моделировании задач газовой динамики и нелокальных физических процессов, изучении процессов размножения клеток, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде [Берс, 1961], [Нахушев, 1995], [Франкль, 1951]. Достаточно полная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями, приведены в монографиях Нахушева [2006, 2011], Бицадзе [1981], Жегалова и Миронова [2001], Кальменова [1993], Репина [1992(B)], Салахитдинова и Уринова [1997], а также в диссертациях Нахушева [1970], Жегалова [1988], Репина [1998].

В данной работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация производных от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа с переменными коэффициентами. При определенном условии на коэффициенты, входящие в постановку задачи, решение исследуемой задачи выписано в явном виде. Показано, что при нарушении указанного условия на коэффициенты, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции. Среди работ, близко примыкающих к исследуемой, отметим работы Репина [1992(A)], Килбас и Репина [1998], Репина и Ефимовой [2002, 2004], Мирсабурова и Чориевой [2016], Ефимовой [2005], Балкизова [2018].

Постановка задачи и критерий ее однозначной разрешимости

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$f = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \\ u_{xx} - u_y, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f = f(x, y)$ – заданная функция, $u = u(x, y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с уравнением теплопроводности

$$u_{xx} - u_y = f, \tag{2}$$

а при $y < 0$ совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} = f. \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается в области Ω , ограниченной характеристиками $AC: x + y = 0$ и $CB: x - y = r$, уравнения (3) при $y < 0$, выходящими из точки $C = (r/2, -r/2)$ и проходящими через точки $A = (0, 0)$ и $B = (r, 0)$ соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках $A, B, A_0 = (0, h), B_0 = (r, h), h > 0$, при $y > 0$. Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $J = \{(x, 0): 0 < x < r\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$ и будем считать, что $f \in C(\overline{\Omega})$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$, $u_x, u_y \in L_1(J)$, удовлетворяющую уравнению (1).

В работе исследуется следующая задача:

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее на линиях AA_0, BB_0, AC, BC и AB внутренне крайевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(r, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y < h, \tag{4}$$

$$\alpha(x) \frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] + \beta(x) \frac{d}{dx} u[\theta_r(x)] + \gamma(x) u_x(x, 0) + \delta(x) u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < r, \tag{5}$$

где $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; -\frac{x}{2}\right)$, $\theta_r(x) = \left(\frac{x+r}{2}; \frac{x-r}{2}\right)$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (3), выходящих из точки $(x, 0)$, с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0, h]$; $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x), \psi(x) \in C^1[0, r] \cap C^2]0, r[$ – заданные функции.

Справедлива

Теорема. Для существования единственного регулярного в области Ω решения задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы относительно коэффициентов $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ и $\delta(x)$ имело место неравенство:

$$[\beta(x) + \alpha(x) + \gamma(x)]^2 + [\beta(x) - \alpha(x) + \delta(x)]^2 \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть относительно коэффициентов $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ и $\delta(x)$ выполнено условие (6), и пусть

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r; \tag{7}$$



$$u_y(x, 0) = v(x), \quad 0 < x < r. \quad (8)$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, с учетом обозначений (7)-(8) получим первое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию $y = 0$:

$$v(x) = \tau'(x) + f(x, 0), \quad (9)$$

а из (4) – с учетом (7) при предельном переходе при $y \rightarrow +0$ имеем

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(r) = \varphi_2(0). \quad (10)$$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y = 0$.

Решение задачи (7)-(8) для уравнения (3) в области Ω_1 дается по формуле Даламбера [Тихонов, Самарский, 1977, с. 59]:

$$u(x, y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+t}^{x+y-t} f(s, t) ds dt. \quad (11)$$

Из формулы (11) находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] &= \frac{1}{2} \left(\tau'(x) - v(x) + \int_{-x/2}^0 f(x+t, t) dt \right), \\ \frac{d}{dx} u[\theta_r(x)] &= \frac{1}{2} \left(\tau'(x) + v(x) - \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t, t) dt \right), \end{aligned}$$

при подстановке которых в условие (5), приходим к равенству

$$\begin{aligned} &[\beta(x) + \alpha(x) + \gamma(x)]\tau'(x) + [\beta(x) - \alpha(x) + \delta(x)]v(x) = \\ &= 2\psi(x) - \alpha(x) \int_{-x/2}^0 f(x+t, t) dt + \beta(x) \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t, t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) и есть искомое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y = 0$.

При $\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]$ из (12) приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \tau'(x) &= \frac{2\psi(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} - \frac{\beta(x) + \delta(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} \int_{-x/2}^0 f(x+t, t) dt + \\ &+ \frac{\beta(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t, t) dt, \end{aligned}$$

откуда с учетом (10) находим

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \varphi_1(0) + \int_0^x \frac{2\psi(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} dt - \int_0^x \frac{\beta(t) + \delta(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} \int_{-t/2}^0 f(t+s, s) ds dt + \\ &+ \int_0^x \frac{\beta(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} \int_{(t-r)/2}^0 f(t-s, s) ds dt, \end{aligned} \quad (13)$$

причем должно быть выполнено условие согласования:

$$\int_0^r \frac{2\psi(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)} dt - \int_0^r \frac{\beta(t)+\delta(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)} \int_{-t/2}^0 f(t+s,s) ds dt + \int_0^r \frac{\beta(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)} \int_{(t-r)/2}^0 f(t-s,s) ds dt = \varphi_2(0) - \varphi_1(0).$$

Из (13) и (9) заключаем, что

$$\begin{aligned} v(x) = f(x,0) + \left[\frac{2\psi(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)} \right]' - \left[\frac{\beta(x)+\delta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)} \right]' \int_{-x/2}^0 f(x+t,t) dt + \\ + \left[\frac{\beta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)} \right]' \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t,t) dt - \frac{1}{2} \frac{[\beta(x)+\delta(x)]f[\theta_0(x)] + \beta(x)f[\theta_r(x)]}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}. \end{aligned} \quad (14)$$

А при $\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0,r]$ из соотношений (9), (10) и (12) находим:

$$\begin{aligned} v(x) = \frac{2\psi(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)} + \frac{\beta(x)+\gamma(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)} \int_{-x/2}^0 f(x+t,t) dt + \\ + \frac{\beta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t,t) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tau(x) = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \varphi_1(0) + \frac{x}{r} \varphi_2(0) - \frac{x}{r} \int_0^r (r-t)[v(t) - f(t,0)] dt + \int_0^x (x-t)[v(t) - f(t,0)] dt. \quad (16)$$

Если же $[\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)][\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)] \neq 0 \quad \forall x \in [0,r]$, то в этом случае из (12) приходим к равенству:

$$\begin{aligned} v(x) = \frac{\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)} \tau'(x) - \frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)} + \\ + \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)} \int_{-x/2}^0 f(x+t,t) dt - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t,t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Исключая из соотношений (9) и (17) функцию $v(x)$, относительно искомой функции $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\tau''(x) - p(x)\tau'(x) = g(x), \quad 0 < x < r, \quad (18)$$

удовлетворяющего условиями (10). В уравнении (18):

$$p(x) = \frac{\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}; \quad g(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)} \int_{-x/2}^0 f(x+t,t) dt -$$

$$-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t,t)dt - \frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)} - f(x,0).$$

Решение задач (18), (10) дается формулой:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \int_0^x \exp\left(\int_0^t p(s)ds\right) \int_0^t g(s) \exp\left(-\int_0^s p(\xi)d\xi\right) ds dt + \varphi_1(0) + \\ & + \frac{\int_0^x \exp\left(\int_0^t p(s)ds\right) dt}{\int_0^r \exp\left(\int_0^t p(s)ds\right) dt} \left[\varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \int_0^r \exp\left(\int_0^t p(s)ds\right) \int_0^t g(s) \exp\left(-\int_0^s p(\xi)d\xi\right) ds dt \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Функцию $\nu(x)$ при этом легко найти из фундаментальных соотношений (9) или (17).

Итак, если относительно коэффициентов $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ выполнено условие (6), то значения искомым функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ находятся и выписываются однозначно по одной из пар формул (13), (14); (15), (16); (17), (19). После того, как функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ найдены, решение задачи 1 в области Ω_1 определяется как решение задачи (7)-(8) для уравнения (3) и выписывается по формуле (11), а в области Ω_2 приходим к задаче нахождения регулярного решения первой краевой задачи для уравнения (2) с граничными условиями (4) и начальным условием $u(x,0) = \tau(x)$, решение которой выписано, например, в работе Нахушева [1995, с. 268].

Пусть теперь нарушено условие (6), то есть имеет место равенство

$$[\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)]^2 + [\beta(x) - \alpha(x) + \delta(x)]^2 = 0 \quad \forall x \in [0, r]. \quad (20)$$

Равенство (20) будет иметь место, например, если $\alpha(x) = \frac{\delta(x) - \gamma(x)}{2}$, а $\beta(x) = -\frac{\delta(x) + \gamma(x)}{2}$.

В этом случае однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений вида:

$$2u(x, y) = \begin{cases} q'(x+y) - q'(x-y) + q(x+y) + q(x-y), & y < 0, \\ 2 \int_0^r G(x, y; s, 0) q(s) ds, & y > 0, \end{cases}$$

где $q(x)$ – произвольная функция из класса $C^1[0, r] \cap C^3]0, r[$, а $G(x, y; s, t)$ – это функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. А решение исследуемой неоднородной задачи 1 при выполнении равенства (20) будет существовать тогда и только тогда, когда относительно заданных функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$, $f(x, y)$ будет выполнено дополнительное требование:

$$2\psi(x) = \alpha(x) \int_{-x/2}^0 f(x+t, t) dt - \beta(x) \int_{(x-r)/2}^0 f(x-t, t) dt. \quad (21)$$

При соблюдении условия (21) множество решений задачи 1 в области Ω_1 будет выписываться по формуле:

$$u(x, y) = \frac{q'(x+y) - q'(x-y)}{2} + \frac{q(x+y) + q(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} f(t, 0) dt + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+t}^{x+y-t} f(s, t) ds dt,$$

а в области Ω_2 для совокупности регулярных решений задачи 1 будет иметь место представление

$$u(x, y) = \int_0^y G_s(x, y; 0, t) \varphi_1(t) dt - \int_0^y G_s(x, y; r, t) \varphi_2(t) dt + \\ + \int_0^r G(x, y; s, 0) q(s) ds - \int_0^y \int_0^r G(x, y; s, t) f(s, t) ds dt.$$

Таким образом, условие (6) является необходимым и достаточным для существования единственного регулярного в области Ω решения задачи 1.

Заключение

В работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация производных от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа с переменными коэффициентами. Найдено необходимое и достаточное условие на заданные функции, обеспечивающее единственность и существование регулярного решения задачи. Показано, что при нарушении указанного условия, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции. При определенных условиях на коэффициенты, входящие в постановку задачи, решение выписано в явном виде.

Список литературы

References

1. Балкизов Ж.А. 2018. Краевая задача со смещением для модельного уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. № 3(23): 19-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26.

Balkizov ZH.A. 2018. Krayevaya zadacha so smeshcheniyem dlya model'nogo uravneniya parabol-giperbolicheskogo tipa tret'yego poryadka. [A boundary value problem with displacement for a model equation of a parabolic-hyperbolic type of the third order] Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki. № 3(23): 19-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26 (in Russian)

2. Берс Л. 1961. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Иностранная литература, 208 с.

Bers L. 1961. Matematicheskiye voprosy dozvukovoy i okolozvukovoy gazovoy dinamiki. [Mathematical problems of subsonic and transonic gas dynamics] M.: Inostrannaya literatura, 208 p. (in Russian)

3. Бицадзе А.В., Самарский А.А. 1969. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. Доклады академии наук СССР. Т. 185, № 4: 739-740.

Bitsadze A.V., Samarskiy A.A. 1969. O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh krayevykh zadach. [Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems] Doklady akademii nauk SSSR. Т. 185, № 4: 739-740. (in Russian)

4. Бицадзе А.В. 1981. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 448 с.

Bitsadze A.V. 1981. Nekotoryye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh. [Some classes of partial differential equations] M.: Nauka, 448 p. (in Russian)



5. Ефимова С.В., Репин О.А. 2004. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса. Дифференц. уравнения. Т.40, №10: 1419–1422.

Yefimova S.V., Repin O.A. 2004. Zadacha s nelokal'nymi usloviyami na kharakteristikakh dlya uravneniya vlagoperenosa. [A problem with nonlocal conditions on characteristics for the moisture transfer equation] Differents. uravneniya. T.40, №10: 1419–1422. (in Russian)

6. Ефимова С.В. 2005. Нелокальная задача для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки, Выпуск 34: 194-196.

Yefimova S.V. 2005. Nelokal'naya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya, vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti. [A nonlocal problem for a hyperbolic equation that degenerates inside the domain] Vestnik SamGTU. Seriya fiz.-mat. nauki, Vypusk 34: 194-196. (in Russian)

7. Жегалов В.И. 1962. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на линии перехода. Ученые записки Казанского университета. Т. 122, Книга 3: 3-16.

Zhegalov V.I. 1962. Krayevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s granichnymi usloviyami na obeikh kharakteristikakh i s razryvami na linii perekhoda. [A boundary-value problem for an equation of mixed type with boundary conditions on both characteristics and with discontinuities on the transition curve] Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. T. 122, Kniga 3: 3-16. (in Russian)

8. Жегалов В.И. 1988. Исследование краевых задач со смещением для уравнений смешанного типа. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Новосибирск.

Zhegalov V.I. 1988. Issledovaniye krayevykh zadach so smeshcheniyem dlya uravneniy smeshannogo tipa. [Investigation of boundary-value problems with displacement for equations of mixed type] Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk. Novosibirsk. (in Russian)

9. Жегалов В.И., Миронов А.Н. 2001. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское математическое общество: 226 с.

Zhegalov V.I., Mironov A.N. 2001. Differentsial'nyye uravneniya so starshimi chastnymi proizvodnymi. [Differential equations with higher partial derivatives] Kazan': Kazanskoye matematicheskoye obshchestvo: 226 p. (in Russian)

10. Кальменов Т.Ш. 1993. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылая, 328 с.

Kal'menov T.SH. 1993. Krayevyye zadachi dlya lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh giperbolicheskogo tipa. [Boundary value problems for linear partial differential equations of hyperbolic type] Shymkent: Gylyaya, 328 p. (in Russian)

11. Килбас А.А., Репин О.А. 1998. Задача со смещением для парабола-гиперболического уравнения. Дифференц. уравнения, Т.34, №6: 799-805.

Kilbas A.A., Repin O.A. 1998. Zadacha so smeshcheniyem dlya parabol-giperbolicheskogo uravneniya. [A problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation] Differents. uravneniya, V.34, №6: 799-805. (in Russian)

12. Мирсабуров М., Чориева С.Т. 2016. О задаче с тремя вариантами смещений для уравнения смешанного типа. Известия ВУЗов. Математика, №4: 32-45.

Mirsaburov M., Choriyeva S.T. 2016. O zadache s tremya variantami smeshcheniy dlya uravneniya smeshannogo tipa. [On a problem with three variants of displacements for an equation of mixed type] Izvestiya VUZov. Matematika, №4: 32-45. (in Russian)

13. Нахушев А.М. 1969(А). Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения. Доклады академии наук СССР. Т.187, № 4: 736-739.

Nakhushev A.M. 1969(A). Novaya krayevaya zadacha dlya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya. [A new boundary value problem for a certain degenerate hyperbolic equation] Doklady akademii nauk SSSR. V.187, № 4: 736-739. (in Russian)

14. Нахушев А.М. 1969(В). О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дифференц. Уравнения. Т. 5, № 1: 44-59.

Nakhushev A.M. 1969(B). O nekotorykh krayevykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy i uravneniy smeshannogo tipa. [Certain boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type] *Differents. uravneniya*. V. 5, № 1: 44-59. (in Russian)

15. Нахушев А.М. 1970. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Новосибирск, 172 с.

Nakhushev A.M. 1970. K teorii lineynykh krayevykh zadach dlya giperbolicheskikh i smeshannykh uravneniy vtorogo poriyadka. [To the theory of linear boundary value problems for hyperbolic and mixed second-order equations] *Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk*. Novosibirsk, 172 p. (in Russian)

16. Нахушев А.М. 1995. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 301 с.

Nakhushev A.M. 1995. Uravneniya matematicheskoy biologii. [Equations of mathematical biology] М.: Vysshaya shkola, 301 p. (in Russian)

17. Нахушев А.М. 2006. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 287 с.

Nakhushev A.M. 2006. Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh. [Problems with displacement for partial differential equations] М.: Nauka, 287 p. (in Russian)

18. Нахушева З.А. 2011. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: КБНЦ РАН, 196 с.

Nakhusheva Z.A. 2011. Nelokal'nyye krayevyye zadachi dlya osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravneniy. [Nonlocal boundary-value problems for basic and mixed types of differential equations] *Nal'chik: KBNTS RAN*, 196 p. (in Russian)

19. Репин О.А. 1992(A). Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа. *Дифференц. уравнения*, Т.28, №1: 173-176.

Repin O.A. 1992(A). Nelokal'naya krayevaya zadacha dlya parabol-giperbolicheskogo uravneniya s kharakteristicheskoy liniyey izmeneniya tipa. [Nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a characteristic line of type change] *Differents. uravneniya*, V.28, №1: 173-176. (in Russian)

20. Репин О.А. 1992(B). Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: издательство Самарского филиала Саратовского университета, 162 с.

Repin O.A. 1992(B). Krayevyye zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipov. [Boundary-value problems for hyperbolic and mixed-type equations] *Samara: izdatel'stvo Samarskogo filiala Saratovskogo universiteta*, 162 p. (in Russian)

21. Репин О.А. 1998. Краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов и дробное интегро-дифференцирование. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Минск.

Repin O.A. 1998. Krayevyye zadachi dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipov i drobnoye integro-differentsirovaniye. [Boundary value problems for equations of hyperbolic and mixed types and fractional integro-differentiation] *Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk*. Minsk. (in Russian)

22. Репин О.А., Ефимова С.В. 2002. Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. *Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки*. Выпуск 16: 10-14.

Repin O.A., Yefimova S.V. 2002. Nelokal'naya krayevaya zadacha dlya parabol-giperbolicheskogo uravneniya s nekharakteristicheskoy liniyey izmeneniya tipa. [A nonlocal boundary value problem for a parabolic hyperbolic equation with a noncharacteristic line of change of type] *Vestnik SamGTU. Seriya fiz.-mat. nauki*. Vypusk 16: 10-14. (in Russian)

23. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. 1997. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН., 165 с.

Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. 1997. Krayevyye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektral'nyim parametrom. [Boundary value problems for equations of mixed type with a spectral parameter] *Tashkent: FAN.*, 165 p. (in Russian)



-
24. Стеклов В.А. 1983. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 432 с.
Steklov V.A. 1983. Osnovnyye zadachi matematicheskoy fiziki. [Basic problems of mathematical physics] M.: Nauka, 432 p. (in Russian)
25. Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1977. Уравнения математической физики. М.: Наука, 736 с.
Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. 1977. Uravneniya matematicheskoy fiziki. [Equations of mathematical physics] M.: Nauka, 736 p. (in Russian)
26. Франкль Ф.И. 1951. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе. Вестник ЛГУ. Серия математика, механика и астрономия. Т.6. № 11: 3 - 7.
Frankl' F.I. 1951. Dva gazodinamicheskikh prilozheniya krayevoy zadachi Lavrent'yeva-Bitsadze. [Two gas-dynamic applications of the boundary value problem of Lavrentiev-Bitsadze] Vestnik LGU. Seriya matematika, mekhanika i astronomiya. V.6, № 11: 3 - 7. (in Russian)
27. Carleman T. 1932. Sur la théorie des equations integrales et ses applications. Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich, 7: 138-151.
28. Dezin A.A. 1963. On the solvable extensions of partial differential operators. Outlines of the Joint Soviet-American symposium on partial differential equation. Novosibirsk: 65-66.

УДК 517.956

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-15-20

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ
С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ НА ГРАНИЦЕ**

**A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SINGULAR SECOND
ORDER ELLIPTIC EQUATION ON A BOUNDED DOMAIN
WITH BOUNDARY ANGULAR POINTS**

А.А. Ларин**A.A. Larin**

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж),
Россия, Воронежская область, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А

Military Educational-Research Centre of Air Force «Air Force Academy named after professors
N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin» (Voronezh),
54A str. Starih bolshevikov, Voronezh, 394064, Russian Federation

E-mail: DOHIOI@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматривается сингулярное эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Оно изучается в ограниченной плоской области с угловыми точками на границе. Сингулярный тип уравнения определяется особенностями в его коэффициентах. Дифференциальное уравнение содержит оператор Бесселя по особой переменной. Постановки задач используют специальные функции гипергеометрического типа, а именно, присоединённые функции Лежандра, через которые выражается искомое решение. Применяемые функциональные пространства со смешанной нормой относятся к классу пространств Соболева – Киприянова с дополнительными граничными условиями. Находятся условия корректной разрешимости изучаемой задачи в указанных весовых функциональных пространствах.

Abstract

In the paper we consider a singular elliptic partial differential equation of the second order. It is studied on a bounded plain domain with boundary corner points. A type of the differential equation is defined by its singular coefficients. A differential equation contains the Bessel operator acting by a special variable. Problems formulations use special functions of hypergeometric type, namely adjoint Legendre functions for solutions representations. The applied functional spaces with mixed norms are of Sobolev-Kipriyanov class with additional boundary conditions. Also a priori estimates are proved for solutions of considered differential equations with boundary conditions in functional spaces. A plan is outlined for solving representation formulas for problem solutions in terms of series in adjoint Legendre functions. The result is proved on correctness of the problem considered in weighted functional spaces. The procedure includes such steps as a proper special change of variables, application of Fourier transform, consideration of the Green function for some special ordinary type differential equation with complex parameter, which is considered on the strip of the plane in new variables.



Ключевые слова: сингулярный, эллиптическая краевая задача, присоединённая функция Лежандра.

Keywords: singular, elliptic boundary value problem, adjoint Legendre function.

В статье рассматривается краевая задача с однородным граничным условием для модельного B – эллиптического уравнения [Сингулярные..., 1997, с. 120] вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad k > 0,$$

в ограниченной плоской области, расположенной в полуплоскости $y > 0$ и прилегающей к линии $y = 0$, граница которой содержит угловые точки, расположенные на этой линии. Устанавливается корректная разрешимость изучаемой задачи в весовых пространствах специального вида. Результаты работ Ларина [2000, 2012] о корректной разрешимости подобной задачи для случая плоского угла в данной статье переносятся на случай ограниченной области. Для эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами систематическое изложение теории краевых задач в областях с негладкой границей дано в фундаментальной работе В.А. Кондратьева [1967] и работах других авторов [Elliptic..., 1985, 1988; Эллиптические..., 1991; Elliptic..., 1997; Spectral..., 2001].

Перейдём к изложению полученных результатов.

Пусть Ω – ограниченная область в полуплоскости $E_2^+ = \{(x, y) \in E_2 : y > 0\}$, граница которой состоит из двух частей Γ^0 и Γ^+ , где Γ^0 – интервал оси Ox с граничными точками $O_1 = O_1(x_1, 0)$ и $O_2 = O_2(x_2, 0)$, $x_1 < x_2$, а Γ^+ – её оставшаяся часть, имеющая с линией $y = 0$ общими точками лишь точки O_1 и O_2 . Обозначим через $B_\delta(M)$ открытый круг радиуса δ с центром в точке $M \in E_2$. Будем предполагать, что Γ^+ – гладкая кривая (класса C^∞) и что существует число $\delta > 0$ такое, что множества $\Omega \cap B_\delta(O_1)$ и $\Omega \cap B_\delta(O_2)$ представляют собой круговые секторы растворов ω_1 и ω_2 соответственно, $\omega_1 \in (0, \pi)$, $\omega_2 \in (0, \pi)$.

Помимо области Ω рассмотрим в плоскости E_2 бесконечные углы K_1 и K_2 с вершинами O_1 и O_2 соответственно, такие, что $\Omega \cap B_\delta(O_i) = K_i \cap B_\delta(O_i)$, $i = 1, 2$. Граница ∂K_1 угла K_1 состоит из луча $\Gamma_1^0 = \{(x, 0) \in E_2 : x > x_1\}$ и замкнутого луча $\Gamma_1^+ = \partial K_1 \setminus \Gamma_1^0$. Граница ∂K_2 угла K_2 состоит из луча $\Gamma_2^0 = \{(x, 0) \in E_2 : x < x_2\}$ и замкнутого луча $\Gamma_2^+ = \partial K_2 \setminus \Gamma_2^0$.

Всюду в дальнейшем черта сверху над символом множества из E_2 будет обозначать замыкание этого множества в E_2 .

Символом $C_+^\infty(\overline{K_1})$ обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых в $\overline{K_1}$ функций, которые чётны по переменной y и имеют компактные в $\overline{K_1} \setminus O_1$ носители. Под условием чётности по переменной y бесконечно дифференцируемой функции $u(x, y)$ мы понимаем условие $\partial^{2p-1} u / \partial y^{2p-1} \Big|_{y=0} = 0$, $p \in N$, выполняющееся для всех допустимых x , в данном случае для всех $x > x_1$. Символом $\dot{C}_+^\infty(\overline{K_1})$ обозначим

подмножество $C_+^\infty(\overline{K_1})$, состоящее из всех функций, обращающихся в ноль на Γ_1^+ . Аналогично вводятся множества функций $C_+^\infty(\overline{K_2})$, $\dot{C}_+^\infty(\overline{K_2})$, $C_+^\infty(\overline{\Omega})$, $\dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$. Носители функций из множеств $C_+^\infty(\overline{\Omega})$ и $\dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$ содержатся в $\overline{\Omega} \setminus (O_1 \cup O_2)$, а условие чётности должно выполняться для всех $x \in (x_1, x_2)$.

Определим теперь весовые функциональные пространства, в терминах которых будет изучаться краевая задача.

Для произвольных вещественных чисел β_1, β_2 и целого $s \geq 0$ введём в рассмотрение пространства $V_{\beta_i}^s(K_i)$, $\dot{V}_{\beta_i}^s(K_i)$, $i = 1, 2$. Пространство $V_{\beta_1}^s(K_1)$ является пополнением множества $C_+^\infty(\overline{K_1})$ по норме

$$\|u\|_{V_{\beta_1}^s(K_1)} = \left(\sum_{\substack{q+2m+p \leq s, \\ p \leq 1}} \int_{K_1} |D_x^q D_y^p B_y^m u|^2 r_1^{2(\beta-s+q+2m+p)} y^k dy dx \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $D_x^q u = \partial^q u / \partial x^q$, $D_y^1 u = \partial u / \partial y$, $D_y^0 u = u$, $B_y u = \partial^2 u / \partial y^2 + k \partial u / (y \partial y)$, $k > 0$, $B_y^m u = B_y(B_y^{m-1} u)$, $m \geq 2$, $r_1 = ((x-x_1)^2 + y^2)^{1/2}$. Пространство $\dot{V}_{\beta_1}^s(K_1)$ определим как пополнение по той же норме множества $\dot{C}_+^\infty(\overline{K_1})$. Функциональные пространства $V_{\beta_2}^s(K_2)$ и $\dot{V}_{\beta_2}^s(K_2)$, $s \geq 0$, определяются аналогично, следует лишь заменить в формуле (1) K_1 на K_2 , r_1 на $r_2 = ((x-x_2)^2 + y^2)^{1/2}$ и β_1 на β_2 . Пополняемыми множествами при этом являются множества $C_+^\infty(\overline{K_2})$ и $\dot{C}_+^\infty(\overline{K_2})$, соответственно.

Пространства $W^s(\Omega)$, $s \in N \cup \{0\}$, определим как пополнение множества $C_+^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{W^s(\Omega)} = \left(\sum_{\substack{q+2m+p \leq s, \\ p \leq 1}} \int_{\Omega} |D_x^q D_y^p B_y^m u|^2 y^k dy dx \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Пространства $\dot{W}^s(\Omega) \subset W^s(\Omega)$ определяются как пополнение по норме (2) множества $\dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$.

Пусть $\tau_1 = \tau_1(x, y)$ и $\tau_2 = \tau_2(x, y)$ – срезающие функции класса $C_0^\infty(E_2)$, такие, что для некоторого $\eta > 0$ выполняются условия $\partial \tau_i / \partial y = 0$, $|y| < \eta$, $i = 1, 2$, причём $\tau_i = 1$ в $B_{\delta/2}(O_i)$, $\text{supp } \tau_i \subset B_\delta(O_i)$, $i = 1, 2$, и пусть $\tau_0 = 1 - \tau_1 - \tau_2$. Через $W_{\beta_1, \beta_2}^s(\Omega)$, $s \in N \cup \{0\}$, обозначим функциональное пространство, получающееся пополнением множества $C_+^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{W_{\beta_1, \beta_2}^s(\Omega)} = \|\tau_0 u\|_{W^s(\Omega)} + \|\tau_1 u\|_{V_{\beta_1}^s(K_1)} + \|\tau_2 u\|_{V_{\beta_2}^s(K_2)}. \quad (3)$$

Символом $\dot{W}_{\beta_1, \beta_2}^s(\Omega)$, $s \in N \cup \{0\}$, обозначим функциональное пространство, получающееся пополнением по той же норме множества функций $\dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим теперь в области Ω краевую задачу вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{k}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad (4)$$

$$(x, y) \in \Omega,$$

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\Gamma^0} = 0, \quad (5)$$

где $f \in W_{\beta_1, \beta_2}^s(\Omega)$, $s \in N \cup \{0\}$.

Везде далее будем предполагать, что фиксированный параметр $k > 1$ и не является нечетным числом.

Под решением краевой задачи (4), (5) из класса $\dot{W}_{\beta_1, \beta_2}^{s+2}(\Omega)$, $s \in N \cup \{0\}$, будем понимать функцию $u \in \dot{W}_{\beta_1, \beta_2}^{s+2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (4) почти всюду в Ω .

Пусть $P_\nu^\mu(z)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода, определенная на разрезе, связанная с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ соотношением [Высшие..., 1973, с. 144]

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right),$$

где символом $\Gamma(l)$ обозначена гамма-функция Эйлера аргумента l , и пусть $m_1^{(i)}$, $i=1, 2$, – наименьшие положительные решения уравнений

$$\varphi_i(m) = P_{m+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \omega_i) = 0, \quad i=1, 2 \quad [\text{Теория...}, 1952, \text{с. 388}].$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть s – целое неотрицательное число и пусть вещественные параметры β_1 и β_2 удовлетворяет условиям $|\beta_i - s - 1| < m_1^{(i)} + k/2$, $i=1, 2$. Тогда для любой функции $f \in W_{\beta_1, \beta_2}^s(\Omega)$ существует единственное решение $u \in \dot{W}_{\beta_1, \beta_2}^{s+2}(\Omega)$ краевой задачи (4), (5) и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\dot{W}_{\beta_1, \beta_2}^{s+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_{\beta_1, \beta_2}^s(\Omega)},$$

в котором постоянная C не зависит от функции f .

Для доказательства теоремы используются предыдущие работы автора [Ларин, 2000, 2012] и следующее утверждение о соотношении решений u_1 и u_2 задачи вида (4), (5) в бесконечном угле K (типа углов K_i , $i=1, 2$), принадлежащих пространствам $\dot{V}_{\gamma_1}^{s+2}(K)$ и $\dot{V}_{\gamma_2}^{s+2}(K)$, соответственно. Сформулируем его для угла $K = K_1$.

Пусть $m_j^{(1)}$, $j=1, 2, \dots$, – все положительные решения уравнения

$$\varphi_1(m) = P_{m+(k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \omega_1) = 0,$$

которые мы для удобства будем считать занумерованными в порядке возрастания, и пусть r_1, θ – полярные координаты с центром в точке O_1 ,

$$r_1 = ((x - x_1)^2 + y^2)^{1/2}, r_1 \geq 0, 0 < \theta \leq \omega_1, \Phi_j^{(1)}(\theta) = (\sin \theta)^{(1-k)/2} P_{m_j^{(1)} + (k-1)/2}^{(1-k)/2}(\cos \theta),$$

$$0 < \theta \leq \omega_1, j = 1, 2, \dots$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть s – целое неотрицательное число и пусть вещественные параметры γ_1 и $\gamma_2, \gamma_1 < \gamma_2$, удовлетворяют условиям

$$|\gamma_1 - s - 1| \neq m_j^{(1)} + k/2, |\gamma_2 - s - 1| \neq m_j^{(1)} + k/2, j = 1, 2, \dots$$

Тогда для любой функции $f \in V_{\gamma_1}^s(K_1) \cap V_{\gamma_2}^s(K_1)$ в каждом из пространств $\dot{V}_{\gamma_i}^{s+2}(K_1), i = 1, 2$, существует единственное решение $u_i(x, y), i = 1, 2$, краевой задачи (4), (5) в угле K_1 , которые связаны соотношением

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) + \sum_{m_j^{(1)} \in (\gamma_1 - s - 1 - \frac{k}{2}, \gamma_2 - s - 1 - \frac{k}{2})} A_j^{(1)}(f) r_1^{-m_j^{(1)} - k} \Phi_j^{(1)}(\theta) + \\ + \sum_{m_j^{(1)} \in (s + 1 - \gamma_2 - \frac{k}{2}, s + 1 - \gamma_1 - \frac{k}{2})} B_j^{(1)}(f) r_1^{m_j^{(1)}} \Phi_j^{(1)}(\theta),$$

где $A_j^{(1)}(f)$ и $B_j^{(1)}(f), j = 1, 2, \dots$, – непрерывные функционалы над $V_{\gamma_1}^s(K_1) \cap V_{\gamma_2}^s(K_1)$.

Последнее утверждение доказывается с помощью перехода от задачи вида (4), (5) в угле с помощью замены переменных $x = x_1 + e^t \cos \theta, y = e^t \sin \theta$ к соответствующей задаче в полосе [Ларин, 2012]. После применения комплексного преобразования Фурье по переменной t дело сводится к нахождению вычетов функции Грина специальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора, зависящего от комплексного параметра и действующего по переменной θ , в её полюсах.

Отметим, что результаты, полученные в настоящей работе, могут быть применены в теории операторов преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с операторами Бесселя [Sitnik...1992, 2017; The Transmutations...2018; Applications... 2018].

Заключение

В работе изучается сингулярное эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в ограниченной плоской области с угловыми точками на границе. Сингулярный тип уравнения определяется особенностями в его коэффициентах, при этом дифференциальное уравнение содержит оператор Бесселя по особой переменной. Постановки задач используют специальные функции гипергеометрического типа, а именно, присоединённые функции Лежандра, через которые выражается искомое решение. Далее определяются функциональные пространства специального типа со смешанной нормой, которые относятся к классу пространств Соболева – Киприянова с дополнительными граничными условиями. Они заключаются в том, что на границе области задаются краевые условия Дирихле и Неймана. В работе получены следующие результаты: находятся условия для корректной разрешимости изучаемой задачи в указанных весовых функциональных пространствах; доказана априорная оценка решений рассматриваемого сингулярного дифференциального

уравнения во введённых весовых функциональных пространствах, получены представления решений этого уравнения с краевыми условиями в виде ряда по присоединённым функциям Лежандра; указаны возможные приложения результатов в теории операторов преобразования.

Список литературы References

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., Наука: 296 с.
Bateman H., Erdelyi A. 1973. Vysshie transcendenty e funkcii. T. 1. [Higher transcendental functions. V. 1]. M., Nauka: 296 p. (in Russian).
2. Гобсон Е.В. 1952. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ: 476 с.
Hobson E.W. 1952. Teoriia sfericheskikh i e llipsoidal ny kh funkcii [The theory of spherical and ellipsoidal functions]. M., IL: 476 p. (in Russian).
3. Киприянов И.А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука: 208 с.
Kipriyanov I.A. 1997. Singuliarny e e llipticheskie kraevy e zadachi [Singular elliptic boundary value problems]. M., Nauka: 208 p. (in Russian).
4. Кондратьев В.А. 1967. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. Тр. Моск. мат. о-ва, 16: 209-292.
Kondrat ev V.A. 1967. Kraevy e zadachi dlia e llipticheskikh uravnenii v oblastiakh s konicheskimi i uglovy mi tochkami [Boundary value problems to elliptic equations on domains with conical and angular points]. Tr. Mosk. mat. o-va, 16: 209-292.
5. Ларин А.А. 2000. Об одной краевой задаче в плоском угле для сингулярного эллиптического уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения, 36(12): 1687-1694.
Larin A.A. 2000. Ob odnoi kraevoi zadache v ploskom ugle dlia singuliarnogo e llipticheskogo uravneniia vtorogo poriadka [On a boundary value problem on a plain angle for the singular elliptic equation of the second order]. Differentialny e uravneniia, 36(12): 1687-1694.
6. Ларин А.А. 2012. Неоднородная краевая задача в плоском угле для сингулярного эллиптического уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения, 48(2): 217-226.
Larin A.A. 2012. Neodnorodnaia kraevaia zadacha v ploskom ugle dlia singuliarnogo e llipticheskogo uravneniia vtorogo poriadka [An nonhomogeneous boundary value problem on a plain angle for the singular elliptic equation of the second order]. Differentialnye uravneniia, 48(2): 217-226.
7. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. 1991. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М., Наука: 336 с.
Nazarov S.A., Plamenevskij B.A. 1991. E llipticheskie zadachi v oblastiakh s kusochno-gladkoi granicej [Elliptic problems on domains with piecewise smooth boundaries]. M., Nauka: 336 p. (in Russian).
8. Dauge M. 1988. Elliptic boundary value problems in corner domains smoothness and asymptotics of solutions. Lecture Notes in Mathematics. V. 1341. 258 p.
9. Grisvard P. 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. Monographs and Studies in Mathematics. 21. Pitman. 410 p.
10. Kozlov V.A., Maz ya V.G., Rossman J. 1997. Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. AMS. Mathematical Surveys and Monographs. V. 52. 414 p.
11. Kozlov V.A., Maz ya V.G., Rossman J. 2001. Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations. AMS. Mathematical Surveys and Monographs. V. 85
12. Katrakhov V.V., Sitnik S.M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. V. 64(2): 211-426.
13. Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E.L., Sitnik S.M. 2018. Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations. Electron. J. Differential Equations. V. 2018 (130): 1-27.
14. Sitnik S.M. 2017. A short survey of recent results on Buschman-Erdelyi transmutations. Journal of Inequalities and Special Functions. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions). V. 8(1): 140-157.
15. Sitnik S.M. 1992. Factorization and estimates of the norms of Buschman-Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces. Soviet Mathematics Doklades. V. 44(2): 641-646.

УДК 517.926: 537.934

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-21-32

**ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ
В ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛИАРДА**

**SPATIALLY INHOMOGENEOUS SOLUTIONS IN TWO BOUNDARY VALUE
PROBLEMS FOR THE CAHN-HILLIARD EQUATIONS**

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов
A.N. Kulikov, D.A. Kulikov

Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова,
Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, 14

Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya St., Yaroslavl, 150003, Russian

Аннотация

Рассматривается известное в математической физике уравнение Кана-Хиллиарда, имеющее приложения в химической кинетике и физике пограничных явлений. Данное нелинейное дифференциальное уравнение изучается вместе с однородными краевыми условиями Дирихле и Неймана. Для обеих краевых задач дан анализ локальных бифуркаций в окрестности однородных состояний равновесия. Для краевой задачи Дирихле получены условия, при выполнении которых в окрестности нулевого состояния равновесия реализуется бифуркация типа «вилка». Более сложный характер бифуркаций реализуется в краевой задаче Неймана. В работе показано, что при превышении порогового значения управляющего параметра из однородных состояний равновесия бифурцируют однопараметрические семейства пространственно неоднородных состояний равновесия. Для обоснования результатов использованы методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий: метод интегральных (инерциальных) многообразий, аппарат теории нормальных форм Пуанкаре, асимптотические методы анализа. Их использование позволяет получать асимптотические формулы для найденных решений, а также изучать вопрос об их устойчивости в смысле определения А.М. Ляпунова в метрике фазового пространства решений.

Abstract

The well-known Cahn-Hilliard equation, which has applications in chemical kinetics and physics of boundary phenomena, is considered. This nonlinear differential equation is studied together with homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions. For both boundary value problems, an analysis of local bifurcations in the neighborhood of homogeneous equilibrium states is given. For the Dirichlet boundary value problem, conditions under which a pitchfork bifurcation is realized in the neighborhood of the zero equilibrium state are obtained. The more complex nature of bifurcations is realized in the Neumann boundary value problem. It is shown that when the threshold value of the control parameter is exceeded, then from homogeneous equilibrium states, one-parameter families of spatially inhomogeneous equilibrium states are bifurcating. To substantiate the results, the methods of the theory of dynamic systems with an infinite-dimensional space of initial conditions were used: the method of integral (inertial) manifolds, the theory of Poincaré normal forms, asymptotic methods of analysis. Their use allows one to obtain asymptotic formulas for the solutions found, and also to study the problem of their stability in the sense of A.M. Lyapunov in the metric of the phase space of solutions.

Ключевые слова: уравнение Кана-Хиллиарда, краевые задачи, динамические системы, устойчивость, бифуркации, асимптотика.

Keywords: Cahn-Hilliard equation, boundary value problems, dynamical systems, stability, bifurcations, asymptotic.

1. Введение

В работе изучается вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений известного в математической физике нелинейного уравнения

$$u_t = (-u_{xx} - au + u^3)_{xx} \quad (1)$$

которое принято называть уравнением Кана-Хиллиарда [Cahn, 1985, с. 262; Temam, 1997, с.183]. Это уравнение моделирует процесс химических реакций в двухкомпонентной среде. В данном варианте уравнения считаем, что $u = u(t, x)$, т.е. неизвестная функция зависит от одной пространственной переменной x .

Естественно, в связи с приложениями в химической кинетике рассматривают и иные, более общие варианты данного уравнения. Например,

$$u_t = \Delta[-\Delta u + F'(u)],$$

где $u = u(t, x, y)$, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным ($\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$), а $F(u)$ в физической химии принято называть химическим потенциалом или свободной энергией [Alikatos, 1991; Pego, 1989].

В уравнении (1) $F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + \frac{u^4}{4}$, $a \in R$, т.е. будет рассмотрен один из самых типичных вариантов выбора $F(u)$. При этом обычно считают, что $a > 0$.

В данной работе ограничимся изучением уравнения (1), если $x \in [0, l]$, $l > 0$. После перенормировок пространственной переменной x без нарушения общности можно считать, что уравнение (1) рассматривается, если $x \in [0, \pi]$, ($l = \pi$).

В большинстве работ уравнение (1) изучалось вместе с одним из видов краевых условий [Alikatos, 1991, с. 112; Pego, 1989, с. 270; Temam, 1997, с. 312]

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0 \quad (2)$$

или

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0. \quad (3)$$

Естественно, что возможен и иной выбор краевых условий, отличных от краевых условий (2) или (3). Достаточно часто краевые условия (2) называют краевыми условиями Дирихле (однородными краевыми условиями Дирихле), а краевые условия (3) – краевыми условиями Неймана (однородными краевыми условиями Неймана). Сразу отметим, что краевая задача (КЗ) (1), (3) имеют однопараметрическое семейство однородных состояний равновесия $u(t, x) = const$ при любых значениях параметра a . В то же время у КЗ (1), (2) есть лишь одно пространственно однородное состояние равновесия $u(t, x) = 0$.

В работе основное внимание будет уделено изучению локальных бифуркаций пространственно неоднородных состояний равновесия КЗ (1), (2) и (1), (3), т.е. таких решений $u(t, x) = v(x)$, для которых $v'(x) \not\equiv 0$. Будет также изучен вопрос об устойчивости таких решений в смысле определения А.М. Ляпунова в естественной норме для решений соответствующих КЗ. Добавим, что для устойчивых пространственно неоднородных состояний равновесия И. Пригожиным был, в свое время, предложен термин диссипативные структуры [Nicolis, 1977, с. 156].

2. Краевая задача Дирихле

В этом разделе анализу будет подлежать КЗ (1), (2). Если ее дополнить начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad (4)$$

где $f(x) \in W_{2,0}^4[0, \pi]$, то начально-краевая (смешанная) задача (1), (2), (4) локально корректно разрешима, т.е. данная КЗ имеет единственное решение $u(t, x)$ при $t \in (0, T_f)$ и $u(t, x)$ как функция x принадлежит $W_2^4[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям. Отметим, что $f(x) \in W_{2,0}^4[0, \pi]$, если данная функция имеет обобщенные производные в смысле определения Соболева до четвертого порядка включительно, принадлежащие $L_2(0, \pi)$ и удовлетворяющие условиям $f(0) = f(\pi) = f'(0) = f'(\pi) = 0$. При этом, в силу теорем вложения [Функциональный анализ, 1972] $f(x) \in C^3[0, \pi]$.

Используя определенные результаты и технику [Temam, 1997; Nicolaenko, 1985] можно показать, что при $a < 1$ справедливо предельное равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$, где $\rho(t) =$

$\|u(t, x)\|_{L_2(0, \pi)} = \sqrt{\int_0^\pi u^2(t, x) dx}$. Это равенство справедливо для всех решений КЗ (1), (2) (всех $f(x) \in W_2^4[0, \pi]$). Поэтому при $a < 1$ КЗ (1), (2) не может иметь нетривиальных диссипативных структур и далее будем предполагать, что $a \geq 1$.

Рассмотрим сначала линеаризованный вариант КЗ (1), (2), т.е. КЗ

$$u_t = Au, \quad Au = -u_{xxxx} - au_{xx}, \tag{5}$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0. \tag{6}$$

Линейный дифференциальный оператор (ЛДО) $A = A(a)$ имеет счетный набор собственных значений (СЗ)

$$\lambda_n = \lambda_n(a) = -n^4 + an^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

которым соответствуют собственные функции (СФ) $h_n(x) = \sin nx$, образующие на $[0, \pi]$ полную ортогональную систему функций. Добавим, что при $a = k^2, k = 1, 2, \dots$ ЛДО $A(k^2) = A_k$ имеет простое нулевое СЗ ($\lambda_k = 0$). При таком выборе параметра a справедливы неравенства $\lambda_k > 0$, если $n < k$ и, напротив, $\lambda_k < 0$, если $n > k$. Напомним также, что уравнение

$$A_k v(x) = g(x), \quad g(x) \in L_2(0, \pi) \tag{7}$$

имеет решение $v(x) \in W_{2,0}^4[0, \pi]$, если $M_k(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin kx dx = 0$ (условие разрешимости). При выполнении последнего условия решение уравнения (7) не единственно. Если $v_0(x)$ – решение, то и $v_0(x) + a \sin kx$ также решение. Условие $M_k(v) = 0$ выделяет одно подходящее решение.

Положим $a = k^2 + \varepsilon$, где $k = 1, 2, \dots$, а $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 \ll 1$. КЗ (1), (2) в §1 будет изучаться при таких вариантах выбора параметра a . Итак, рассмотрим КЗ

$$u_t = A_k(\varepsilon)u + (u^3)_{xx}, \tag{8}$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0. \tag{9}$$

Здесь $A_k(\varepsilon)u = -u_{xxxx} - (k^2 + \varepsilon)u_{xx}$.

КЗ (8), (9) при достаточно малых ε имеет в некоторой окрестности нулевого решения гладкое одномерное локально инвариантное многообразие $M_k(\varepsilon)$ [Куликов, 1976; Marsden, 1976; Kolesov, 2003; Kolesov, 2003; Куликов, 1991], которое принято называть центральным [Marsden, 1976]. Это многообразие притягивающее (локальный аттрактор), если $k = 1$, а при остальных k оно седловое.



На нем анализ решений КЗ (8), (9) при каждом $k \in \mathbb{N}$ сводится к анализу нормальной формы (НФ) – обыкновенного скалярного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \varepsilon F(y, \varepsilon), y = y(t).$$

При анализе НФ в ситуации общего положения определяющую роль играет «главная» часть этого дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \varepsilon F_0(y), \quad (10)$$

где $F_0(y) = F(y, 0)$, т.е. $F(y, \varepsilon) = F_0(y) + O(\varepsilon)$.

Для нахождения $F_0(y)$ используем одну из модификаций известного алгоритма Крылова-Боголюбова, модифицированного для анализа бесконечномерных динамических систем [Kulikov, 2012, 2014, 2015, 2016, 2017]. При реализации такой модификации решения КЗ (8), (9), принадлежащие одномерному локально инвариантному многообразию $M_k(\varepsilon)$, следует искать в виде суммы

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(t, x) + \varepsilon u_2(t, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x) + o(\varepsilon^{3/2}). \quad (11)$$

Здесь $u_1(t, x) = y(t) \sin kx$, а $y(t)$ – решение НФ (10). Наконец, для функций $u_2(t, x)$, $u_3(t, x)$ справедливы следующие свойства:

1) при всех рассматриваемых t справедливо включение

$$u(t, x) \in W_{2,0}^4[0, \pi] \text{ (как функция переменного } x);$$

$$2) M_k[u_j] = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_j(t, x) \sin kx \, dx = 0, \text{ где } j = 2, 3, \dots, k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1. Формулу (11) можно «уточнить» и рассмотреть в ней большее число слагаемых, но в ситуации общего положения и, в частности, при анализе КЗ (8), (9) это излишне. Привлечение большего числа слагаемых уточняет асимптотические формулы, которые будут получены далее.

Для определения функций $u_2(t, x)$, $u_3(t, x)$ получаем линейные КЗ

$$u_{2t} = A_k u_2, \quad u_2(t, 0) = u_2(t, \pi) = u_{2xx}(t, 0) = u_{2xx}(t, \pi) = 0, \quad (12)$$

$$u_{3t} = A_k u_3 + G(x, y), \quad u_3(t, 0) = u_3(t, \pi) = u_{3xx}(t, 0) = u_{3xx}(t, \pi) = 0, \quad (13)$$

где $G(x, y) = (u_1^3)_{xx} - u_{1xx} - F_0(y) \sin kx$, а $u_1 = y(t) \sin kx$.

Однородная КЗ (12) имеет единственно решение $u_2 = 0$ из подходящего класса функций. Неоднородная КЗ (13) имеет единственное, с точностью до величин, имеющих порядок $O(\varepsilon)$, решение

$$u_3(x, y(t)) = \frac{1}{32k^2} y^3(t) \sin 3kx,$$

если выполнено условие разрешимости и $y(t)$ – решение уравнения (10), т.е. «укороченной» НФ. Подчеркнем, что $F_0(y) = k^2 y - \frac{3}{4} k^2 y^3$.

Перейдем теперь к анализу НФ (10), т.е. скалярного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \varepsilon k^2 \left[y - \frac{3}{4} y^3 \right].$$

Оно имеет три состояния равновесия

$$S_0: y = 0, \quad S_{\pm}: y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Оба ненулевых состояния равновесия S_{\pm} асимптотически устойчивы как решения вспомогательного дифференциального уравнения (10), а S_0 – неустойчиво.

Доказательство последнего утверждения стандартно. Из результатов работ Куликова и других авторов [Куликов, 1976, 1991; Marsden, 1976; Kolesov, 2003] вытекает, что справедливо утверждение:

Теорема 1. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (8), (9) имеет два пространственно неоднородных состояния равновесия*

$$S_{\pm} = S_{\pm}(k): v(x, \varepsilon) = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \varepsilon^{1/2} \sin kx \pm \frac{\sqrt{3}}{36k^2} \varepsilon^{3/2} \sin 3kx + O(\varepsilon^2).$$

При $k = 1$ они оба устойчивы и неустойчивы, если $k \geq 2$.

Добавим, что нулевое решение КЗ асимптотически устойчиво и при $a = 1$. Это вытекает из отрицательности первой ляпуновской величины (она равна $-\frac{3}{4}k^2$).

3. Краевая задача Неймана

КЗ (1), (3) обычно рассматривают вместе с дополнительным условием [Alikatos, 1991, с. 112, Pego, 1989, с. 270, Теман, 1997, с. 312] $M_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx = 0$, т.е. КЗ

$$u_t = -u_{xxxx} - au_{xx} + (u^3)_{xx}, \tag{14}$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0, M(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx = 0. \tag{15}$$

Построения, аналогичные конструкциям §2 данной работы, позволяют заключить, что справедливы следующие утверждения.

Пусть $A v = A(a)v = -v^{(IV)} - av''$ – ЛДО, определенный на достаточно гладких функциях $v(x)$, которые дополнительно удовлетворяют условиям:

$$v'(0) = v'(\pi) = v'''(0) = v'''(\pi) = 0 \text{ и } M_0(v) = 0.$$

Тогда этот оператор имеет дискретный спектр $\lambda_n(a) = -n^4 - an^2$. СЗ $\lambda_n(a)$ – простые и им отвечают СФ $\cos nx$. Выше $n = 1, 2, 3, \dots$. Семейство функций $\{\cos nx\}$ в пространстве $L_{2,0}(0, \pi)$ образует полную ортогональную систему ($f(x) \in L_{2,0}(0, \pi)$, если $f(x) \in L_2(0, \pi)$ и $M_0(f) = 0$).

В качестве фазового пространства решений КЗ (14), (15) можно и естественно выбрать функции $f(x) \in \widetilde{W}_{2,0}^4[0, \pi]$, т.е. такие функции $f(x) \in W_2^4[0, \pi]$, для которых одновременно выполнены краевые условия $f'(0) = f'(\pi) = f'''(0) = f'''(\pi) = 0$, а также $M_0(v) = 0$.

КЗ (14), (15) имеет нулевое состояние равновесия, асимптотически устойчивое при $a \leq 1$ и неустойчивое при $a > 1$.

Пусть $a = k^2 + \varepsilon$ ($k \in \mathbb{N}$), $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 – малая положительная постоянная. Как и в §2, при таком выборе параметра a справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.

Теорема 2. *Существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(k))$ КЗ (14), (15) имеет кроме нулевого состояния равновесия еще два пространственно неоднородных $E_{\pm}(k)$, для которых справедлива асимптотическая формула*



$$u_{\pm}(x, k, \varepsilon) = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \varepsilon^{1/2} \cos kx \mp \frac{\sqrt{3}}{36k^2} \varepsilon^{3/2} \cos 3kx + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Состояния равновесия $E_{\pm}(k)$ асимптотически устойчивы, если $k = 1$ и седловые (неустойчивы), если $k = 2, 3, \dots$ Нулевое состояние равновесия в данной ситуации неустойчиво.

Подчеркнем еще раз, что анализ КЗ (1), (3) с дополнительным условием $M_0(u) = 0$ приводит к аналогичным результатам, полученным при анализе КЗ (1), (2) в §2. Добавим, что бифурцирующие из нулевого состояния равновесия неоднородные состояния равновесия $E_{\pm}(k)$ устойчивы только при бифуркациях на первой моде (при $k = 1$). Мы говорим о бифуркации на моде k , если первое слагаемое в асимптотической формуле для функций, задающих неоднородное состояние равновесия, содержится в качестве первого слагаемого $\cos kx$ (это не исключает, что остальные слагаемые асимптотической формулы содержат $\cos mx$ при $m \neq k$).

Иная ситуация возникает при анализе КЗ (1), (3), если не привлекать дополнительное условие $M_0(u) = 0$, т.е. вместо КЗ (14), (15) рассмотреть более общий вариант

$$u_t = -u_{xxxx} - au_{xx} + (u^3)_{xx}, \quad (16)$$

$$u_x(t, 0) = u_{xxx}(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, \pi) = 0. \quad (17)$$

Отметим два свойства КЗ (16), (17). Во-первых, она имеет кроме нулевого состояния равновесия семейство однородных состояний равновесия $u(t, x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Во-вторых, если $M_0(u(0, x)) = \alpha$, то $M_0(u(t, x)) = \alpha$ при всех рассматриваемых $t > 0$.

Действительно, пусть $u(t, x)$ – какое-либо решение КЗ (16), (17). Данную функцию двух переменных можно представить в виде ряда

$$u(t, x) = u_0(t) + v(t, x), v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \cos nx,$$

где $u_0(t) = M_0(u(t, x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx, v_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \cos nx dx$. Сразу отметим, что $M_0(v) = 0$, а также, что $u_0(t) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Справедливость последнего замечания вытекает из справедливости тождества

$$\int_0^{\pi} \{-u_{xxxx} - au_{xx} + (u^3)_{xx}\} dx = 0$$

для решений КЗ (16), (17). Следовательно, $\frac{du_0(t)}{dt} = 0$, т.е. $u_0(t) = \alpha = \text{const}$.

Два последних замечания позволяют сделать замену

$$u(t, x) = \alpha + v(t, x), \quad (18)$$

где $\alpha = M_0(u)$ и, следовательно, постоянная α – произвольна. При этом, конечно, $M_0(v) = 0$. В результате замены (18) получаем вспомогательную КЗ

$$v_t = A(\alpha)v + F(v, \alpha), \quad (19)$$

$$v_x(t, 0) = v_x(t, \pi) = v_{xxx}(t, 0) = v_{xxx}(t, \pi) = 0, M_0(v) = 0, \quad (20)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ произвольно, а

$$A(\alpha)v = -v_{xxxx} - a(\alpha)v_{xx}, \quad a(\alpha) = a - 3\alpha^2, \quad F(v, \alpha) = 3\alpha(v^2)_{xx} + (v^3)_{xx}.$$

Мы получили обобщенный вариант КЗ (14), (15). В частности, правая часть уравнения (19) зависит от параметра α и содержит уже квадратичные слагаемые. Отметим, что $a(0) = a, a(\alpha) \leq a$, при всех значениях вспомогательного параметра α . На первом этапе анализа КЗ (19), (20) считаем, что коэффициенты уравнения (19) фиксированы, т.е. величина α выбрана. Перенос результатов на КЗ (14), (15) будет осуществлен на втором этапе. Подчеркнем, что КЗ (19), (20) имеет пространственно однородное состояние равновесия $v = 0$. Для анализа его локальной устойчивости рассмотрим линеаризованную в нуле КЗ (19), (20), т.е. уравнение

$$v_t = A(\alpha)v, \tag{21}$$

дополненное условиями (20). СЗ ЛДО $A(\alpha)$

$$\lambda_n = \lambda_n(\alpha) = -n^4 + a(\alpha)n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и соответствующие СФ – $\cos nx$. При этом, естественно, при $a(\alpha) < 1$ нулевое решение КЗ (19), (20) заведомо асимптотически устойчиво, а при $a(\alpha) > 1$ неустойчиво. При $a(\alpha) = 1$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения КЗ (19), (20) в смысле использования теоремы об устойчивости по линейному приближению. При этом ответ об устойчивости нулевого решения КЗ (19), (20) не столь однозначен, как при изучении КЗ (14), (15) при $a = 1$. Добавим, также, что при $a(\alpha) = k^2$ ($k = 2, 3, \dots$) ЛДО $A(\alpha)$ также имеет простое нулевое СЗ, а соответствующая ему СФ $e_k(x) = \cos kx$. При этом для собственных значений λ_n при $n < k$ справедливы неравенства $\lambda_n > 0$, но $\lambda_m < 0$ при $m > n$.

Пусть теперь $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), то $\lambda_k(\varepsilon) = \gamma\varepsilon k^2$, и если ε – достаточно малая положительная постоянная и $\lambda_n(\varepsilon) > \lambda_k(\varepsilon)$ при $n < k$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\lambda_m(\varepsilon) < 0$, если $m > k$. При этом $\lambda_m(\varepsilon) \rightarrow -\infty$, если $m \rightarrow \infty$.

Как и в случае анализа КЗ (14), (15), при $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ КЗ имеет одномерное инвариантное многообразие $M_1(\alpha, k, \varepsilon)$. Оно притягивающее, если $k = 1$ и седловое при $k \in \mathbb{N}$ и отличное от 1. Решения на нем восстанавливаются после анализа скалярного дифференциального уравнения (НФ)

$$\dot{y} = \varepsilon F(y, \alpha, k, \varepsilon). \tag{22}$$

Особую роль, как и ранее, играет укороченный вариант НФ (22)

$$\dot{y} = \varepsilon F_0(y, \alpha, k) = \varepsilon F(y, \alpha, k, 0). \tag{23}$$

Для восстановления структуры правой части НФ (23) можно и удобно использовать алгоритм, который был уже два раза применен ранее (в §2 и при анализе КЗ (14), (15)) при соответствующем выборе бифуркационного параметра. Ниже аналогичную роль играет уже не a , а $a(\alpha)$. Пусть

$$a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Решения КЗ (19), (20) при таком выборе $a(\alpha)$, принадлежащие одномерному инвариант-ному многообразию $M_1(\alpha, k, \varepsilon)$, будем искать как и в предыдущих разделах в виде

$$v(t, x, \varepsilon, k) = \varepsilon^{1/2}v_1(t, x, k) + \varepsilon v_2(t, x, k) + \varepsilon^{3/2}v_3(t, x, k) + O(\varepsilon^2). \tag{24}$$



При этом, $v_1(t, x, k) = y(t)\cos kx$, $y(t) = y(t, \alpha, k)$ решение НФ (23). Наконец для достаточно гладких функций $v_2(t, x, k)$, $v_3(t, x, k)$ выполнены следующие свойства:

- 1) при фиксированном t и выбранном k каждая из этих функций принадлежит прост-ранству $W_2^4[0, \pi]$;
- 2) удовлетворяет краевым условиям (20);
- 3) для них справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v_j(t, x, k) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v_j(t, x, k) \cos kx dx = 0 \quad (j = 2, 3).$$

Подстановка суммы (24) в КЗ (19), (20) при $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ и выделение слагаемых при ε и $\varepsilon^{3/2}$ как и ранее приводит к двум линейным неоднородным КЗ для определения $v_j = v_j(t, x, k)$, $j = 2, 3$:

$$\begin{aligned} v_{2t} &= A_k(\alpha)v_2 + 3\alpha(v_1)_{xx}, \\ v_{2x}(t, 0) &= v_{2x}(t, \pi) = v_{2xxx}(t, 0) = v_{2xxx}(t, \pi) = 0, \\ v_{3t} &= A_k(\alpha)v_3 - F_0(y) \cos kx + \gamma y \cos kx + 6\alpha(v_1v_2)_{xx} - (v_1^3)_{xx}, \\ v_{3x}(t, 0) &= v_{3x}(t, \pi) = v_{3xxx}(t, 0) = v_{3xxx}(t, \pi) = 0, \end{aligned}$$

Их анализ с привлечением условий разрешимости позволяют найти $F_0(y)$, $v_2(t, x, k)$, $v_3(t, x, k)$. Оказалось, что

$$\begin{aligned} v_2(t, x, k) &= \eta_2 y^2 \cos 2kx, \quad v_3(t, x, k) = \eta_3 y^3 \cos 3kx, \\ F_0(y, k) &= k^2 y \left[\gamma - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{k^2} \right) y^2 \right], \quad \eta_2 = -\frac{\alpha}{2k^2}, \quad \eta_3 = \frac{1}{32k^2} \left(\frac{6\alpha^2}{k^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

где $y = y(t, \alpha, k)$ – решение НФ (23).

Замечание 2. При анализе КЗ (14), (15) получали, что $u_2 = 0$, так как в ней отсутствуют квадратичные слагаемые. Естественно, что в нашем последнем случае это не так и поэтому при $\alpha \neq 0$ получаем $v_2 \neq 0$.

Приступим сначала к анализу НФ (23), т.е. к дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = k^2 y [\gamma - dy^2], \quad (25)$$

где $d = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{k^2} \right)$.

Лемма. Дифференциальное уравнение (25) имеет два ненулевых состояния равновесия $S_{\pm}(k)$: $y = \pm \sqrt{\gamma/d}$, если $\gamma d > 0$. Они оба асимптотически устойчивы, если $d > 0$ ($\gamma > 0$) и неустойчивы при $d < 0$ ($\gamma < 0$).

Из этой леммы вытекает справедливость утверждения [Куликов, 1976, 1991; Marsden, 1976; Kolesov, 2003]:

Теорема 3. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k, \alpha)$), что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состояниям равновесия $S_{\pm}(k)$ соответствуют состояния равновесия $E_{\pm}(k, \alpha)$ КЗ (19), (20) при $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ ($\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$) для которых справедлива асимптотическая формула

$$v_{\pm}(x, \varepsilon, k) = \varepsilon^{1/2} \xi \eta_2 \cos kx + \varepsilon \xi^2 \cos 2kx + \varepsilon^{3/2} \xi^3 \eta_3 \cos 3kx + O(\varepsilon^2), \quad \xi = \pm \sqrt{\gamma/d}.$$

Данные состояния равновесия $E_{\pm}(k, \alpha)$ наследуют устойчивость состояний равновесия НФ (25), если $k = 1$. При остальных натуральных k они заведомо седловые (неустойчивы).

Наконец, при таких вариантах выбора параметра $a(\alpha)$ ($a(\alpha) > 1$) нулевое решение КЗ (19), (20) неустойчиво.

Замечание 3. Все выводы получены при $d \neq 0$. При $d = 0$ необходим дополнительный анализ КЗ. Наконец, если $\gamma = 0$ и $d > 0$, то нулевое решение НФ очевидно асимптотически устойчиво и напротив, оно неустойчиво при $d < 0$, т.е. при $a(\alpha) = 1$ нулевое решение вспомогательной КЗ (19), (20) также асимптотически устойчиво, как и при $a(\alpha) < 1$. Добавим, что при $\gamma = 0$ и $d < 0$ асимптотическая устойчивость нулевого решения элементарно проверяется простым интегрированием соответствующего скалярного дифференциального уравнения первого порядка.

Приступим теперь к перенесению полученных результатов для вспомогательной КЗ (19), (20) на основную КЗ (16), (17).

Пусть a и α выбраны таким образом, что

$$a - 3\alpha^2 - k^2 = \gamma\epsilon$$

при некотором k . Тогда КЗ (16), (17) имеет два пространственно неоднородных решения $SE_{\pm}(\alpha, k)$, соответствующих $E_{\pm}(\alpha, k)$, если, конечно, $\epsilon \in (0, \epsilon_0(k))$. Для решений, формирующих $SE_{\pm}(\alpha, k)$, справедливы асимптотические формулы (см. теорему 3):

$$u_{\pm}(x, \epsilon, \alpha, k) = \alpha + v_{\pm}(x, \epsilon, k).$$

Эти два состояния равновесия устойчивы, если состояния равновесия $E_{\pm}(\alpha, k)$ асимптотически устойчивы и неустойчивы в остальных случаях. Подчеркнем, что состояния равновесия $SE_{\pm}(\alpha, k)$ в принципе не могут быть асимптотически устойчивы, так как в окрестности любого из них есть также состояние равновесия, соответствующее иному α ($\alpha = \alpha_1$), если $|\alpha - \alpha_1| \ll 1$, т.е. $a - 3\alpha^2 = k^2 + \gamma\epsilon$, а $a - 3\alpha_1^2 = k^2 + \gamma\epsilon_1$, где $\epsilon, \epsilon_1 \in (0, \epsilon_0)$.

Отметим некоторые важные моменты результатов анализа КЗ (16), (17).

Пусть $a \in (m^2, (m + 1)^2)$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда КЗ (16), (17) имеет $2m$ однопараметрических семейств пространственно неоднородных решений. Действительно, выберем α таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$a - 3\alpha^2 = k^2 + \gamma\epsilon$$

при некотором $k \leq m, \gamma, \epsilon, \epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Ясно, что выбор соответствующих α возможен:

$$\alpha = \alpha_{\pm}(k, \epsilon) = \pm \sqrt{\frac{a - k^2 - \gamma\epsilon}{3}}. \tag{26}$$

Как уже отмечалось ранее, в таком случае КЗ (16), (17) имеет состояния равновесия $SE_{\pm}(\alpha(k, \epsilon), k)$, определяемые формулой

$$u_{\pm}(x, \epsilon, k, \alpha) = \alpha + v_{\pm}(x, \epsilon, k),$$

где α выбрано по одной из версий формулы (26), т.е. $\alpha = \alpha(k, \epsilon)$. Решения, формирующие такие семейства (инвариантные многообразия) состояний равновесия, как правило, неустойчивы. Они могут быть устойчивыми, если $k = 1$ и дополнительно $\alpha(k, \epsilon) \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Анализ последнего включения показал, что оно возможно лишь при $a \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$.

При $a < \frac{5}{2}$ справедливо неравенство $d > 0$. В свою очередь, НФ (25) лишь при $d > 0$ может иметь асимптотически устойчивые ненулевые состояния равновесия, т.е. с необходимостью

$$\frac{1}{2} - \alpha^2 > 0$$

и, следовательно, $\frac{a-1}{3} < \frac{1}{2}$.

При $k = 2, 3, 4, \dots$ неустойчивость соответствующих состояний равновесия очевидна, так как ЛДО $A_k(\alpha)$ в таком случае имеет СЗ в правой полуплоскости комплексной плоскости.

4. Заключение

Рассмотрены две КЗ для традиционной версии уравнения Кана-Хиллиарда [Cahn, 1985; Temam, 1997]. В первой из них, задаче Дирихле, реализуются достаточно стандартные локальные бифуркации типа «вилка». При $a \approx k^2$ ($k = 1, 2, \dots$) рождается пара пространственно неоднородных решений. В прикладной терминологии реализуется один из вариантов бифуркации Тьюринга-Пригожина. Иная ситуация возникает при анализе этого уравнения вместе с однородными краевыми условиями Неймана. В такой КЗ, которая наиболее типична для математических задач химической кинетики, бифурцируют уже однопараметрические семейства пространственно неоднородных решений. При этом такие бифуркации возможны при любом из значений $a \in (1, \infty)$, т.е. необязательно при $a \approx k^2$ как в задаче Дирихле.

Добавим, что при каждом $a \in (1, \frac{5}{2})$ появляются устойчивые пространственно неоднородные состояния равновесия, т.е. физически реализуемые диссипативные структуры.

Отметим, что полученный результат основан на использовании строгих математических методов теории бесконечномерных динамических систем без применения традиционных приемов изучения такого типа задач, как метод Галеркина (Фуэдо-Галеркина) или, конечно, разностных методов с последующим численным анализом. Более того, полученные результаты характерны скорее для бесконечномерных динамических систем и, по-видимому, не имеют аналогов, кроме, быть может, очень искусственных примеров, при изучении локальных бифуркаций для конечномерных динамических систем.

Отметим также, что в данной работе была изучена основная версия уравнения Кана-Хиллиарда, когда химический потенциал выбирался следующим образом:

$$F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + \frac{u^4}{4}.$$

В приложениях к гидродинамике [Пухначев, 1985, с.1224; Frolovskaya, 2013, с. 49; Frolovskaya, 2013, с. 330] было предложено выбрать $F(u)$ иначе:

$$F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + b\frac{u^3}{3}, a, b \in R.$$

Наконец, предложено считать [Mchedelov-Petrosyan, 2013, с. 90], что

$$F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + b\frac{u^3}{3} + c\frac{u^4}{4}, a, b, c \in R.$$

Такие варианты выбора потенциала, конечно, заслуживают отдельного изучения, но большинство результатов с небольшими изменениями сохраняются.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

Список литературы References

1. Куликов А.Н. 1976. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве. Межвуз. темат. сборник “Исследование по устойчивости и теории колебаний”: 114-129.
Kulikov A.N. 1976. O gladkikh invariantnykh mnogoobraziyakh polugruppy nelineynich operatorov v banachovom prostranstve [On smooth invariant manifolds of a semigroup of nonlinear operators in a Banach space]. Research on stability and oscillation theory: 114-129. (in Russian).
2. Куликов А.Н. 1991. Инерциальные многообразия нелинейных автоколебаний дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Препринт № 85 института прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва, 22.
Kulikov A.N. 1991. Inertsialnye mnogoobraziya nelineynich avtokolebaniy differentsialnykh uravneniy v gilbertovom prostranstve [Inertial manifolds of nonlinear self-oscillations of differential equations in a Hilbert space]. Preprint № 85 of institute of M. V. Keldysh applied mathematics, Moscow, 22. (in Russian)
3. Куликов А.Н., Куликов Д.А. 2014. Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского. Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 3(4): 408-415.
Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2014. Bifurkatsiyi prostranstvenno neodnorodnykh recheniy v dvuch kraevich zadachach dlya obochennogo uravneniya Kuramoto-Sivashinskiy [Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions in Two Boundary Value Problems for the Generalized Kuramoto–Sivashinsky Equation]. Bulletin of the National Nuclear Research University «MIFI», 3(4): 408-415. (in Russian)
4. Пухначев В.В. 1985. Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной границей. Труды института теплофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Изд-во Сибирского отделения РАН: 119-127.
Pukhnachev V.V. 1985. Gidrodinamica i teploobmen techeniy gidkosti so svobodnoy granitsey [Hydrodynamics and heat transfer of fluid with a free boundary]. Institute proceedings of the Institute of Thermal Physics of the Siberian Branch RAN: 119-127.
5. Функциональный анализ. 1972. Справочная библиотека. М., Наука, 544.
Funktsionalniy analis [Functional analysis. Reference library]. Moscow, Nauka, 544. (in Russian).
6. Alikatos N., Bates P.W., Fusco G. 1991. Slow Motion for the Cahn-Hilliard Equation in One Space Dimension. Journal of Differ. Equation, 90 (1): 81–135.
7. Cahn J.W., Hilliard J.E. 1958. Free energy of a Non-Uniform system. J. Chem. Phys., 28 (2): 258-267.
8. Frolovskaya O.A., Pukhnachev V.V. 2013. Stationary solutions of quadratic Cahn-Hilliard equation and their stability. AIP Conference Proceedings, 1561 (1): 47-52.
9. Frolovskaya O.A., Admaev O.V., Pukhnachev V.V. 2013. Special case of the Cahn-Hilliard equation. Siberian Electronic Mathematical Report, 10: 324-334.
10. Kolesov A. Yu, Kulikov A.N., N. Kh. Rozov. 2003. Invariant tori of a class of point mappings: the annulus principle. Differential equations, 39(5): 614-631.
11. Kolesov A. Yu, Kulikov A.N., N. Kh. Rozov. 2003. Invariant tori of a class of point transformations: preservation of an invariant torus under perturbations. Differential equations, 39(6): 775-790.
12. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2012. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 52(5): 930-945.



13. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2015. Bifurcation in a boundary-value problem of nanoelectronics. *Journal of Mathematical Sciences*, 208 (2): 211-221.
14. Kulikov A., Kulikov D. 2015. Bifurcation in Kuramoto-Sivashinsky equation. *Pliska Studia Mathematica*, 25: 101-110.
15. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2016. Spatially inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto-Sivashinsky equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 219 (2): 173-183.
16. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2017. Local bifurcations in the periodic boundary value problem for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. *Automation and Remote Control*, 78 (11): 1955-1966.
17. Mchedlov-Petrosyan P.O., Kopychenko D. Yu. 2013. Exact solutions for some modifications of the nonlinear Cahn-Hilliard equation. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 12: 88-93.
18. Marsden J.E., McCracken M. 1976. *The Hopf Bifurcations and its Applications*. Springer-Verlag, 331.
19. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. 1985. Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors. *Physica D*, 16 (2): 155-183.
20. Nicolis G., Prigogine I. 1977. *Self-organization in nonequilibrium systems from dissipative structures to order through fluctuations*. John Wiley & Sons, 491.
21. Pego R.L. 1989. Front Migration in the Nonlinear Cahn-Hilliard equation. *Proceedings of the Royal Society of London. A*, 422: 261-278.
22. Temam R. 1997. *Infinite - Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Second edition. N.-Y., Springer-Verlag. 1997, 673.

УДК 514.76

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-33-40

**КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР
НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ С ВНУТРЕННЕЙ
СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ****CLASSIFICATION OF ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURES ON
DISTRIBUTIONS WITH INTERNAL SYMPLECTIC CONNECTIVITY****А.В. Букушева****A.V. Bukusheva**

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского,
Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky
83 Astrahanskaya St, Saratov, 410012, Russia

E-mail: bukusheva@list.ru

Аннотация

На распределении контактной структуры с помощью фиксированной внутренней симплектической связности определяется (продолженная) почти контактная метрическая структура. Выделяются внутренние инварианты контактной структуры с заданной внутренней симплектической связностью: тензор кривизны Схоутена, допустимая симплектическая структура и тензор Вагнера-Схоутена. В терминах внутренних инвариантов осуществляется классификация продолженных структур. В частности доказывается, что множество продолженных почти контактных метрических структур не содержит в себе косимплектические структуры и структуры Кенмоцу. Найдены условия, при которых продолженная почти контактная метрическая структура принадлежит классу C_{11} .

Abstract

The article is devoted to the study of geometric structures that occur in the distribution of contact manifold. In the previous author's research almost contact metric structures have been studied. These almost contact metric structures are called extended structures, and are naturally defined on distributions of almost contact and paracontact metric manifolds, bi-metric manifolds, sub-Finsler and sub-Riemannian manifolds. The contact manifold does not have Riemannian metric in contrast to the manifolds listed above. Consequently, the metric tensor of the extended structure is determined due to the symplectic form that fits up the contact structure. The extended almost contact metric structure is defined on the distribution of the contact structure with a fixed internal symplectic connection. The interior invariants of a contact structure with a given interior symplectic connection are distinguished in the article. The following interior invariants are examined: Schouten curvature tensor, the admissible symplectic structure and Wagner-Schouten tensor. The classification of extended structures is carried out in terms of internal invariants. In particular, it is proved that the set of extensions of almost contact metric structures does not contain any cosymplectic and Kenmotsu structures. Besides, the article focuses on the conditions for referring the extended almost contact metric structure to the class C_{11} .

Ключевые слова: контактная структура, почти контактная метрическая структура, внутренняя симплектическая связность, кососимметрическая структура, структура Кенмоцу.

Keywords: contact structure, almost contact metric structure, interior symplectic connection, skew-symmetric structure, Kenmotsu structure.

1. Введение

В современной дифференциальной геометрии касательные расслоения гладких многообразий занимают весьма почетное место. Обычно в качестве исходного многообразия выбирается риманово (или финслерово) многообразие, касательное расслоение к которому наделяется римановой структурой. Существуют и другие возможности задания на касательном расслоении многообразия римановой метрики. Начало исследования геометрии многообразия D , наделенного естественным образом дополнительными структурами, начинается с работ Букущева, [2011, 2012, 2015]. В отличие от многообразия TM , многообразие D имеет нечетную размерность. Таким образом, многообразие D , например, не может быть наделено симплектической структурой, зато оно естественным образом может нести на себе (продолженную) почти контактную метрическую структуру.

Свойства продолженной структуры зависят от строения инвариантов внутренней геометрии многообразия M . К основным инвариантам внутренней геометрии субриманова многообразия M мы относим: тензор кривизны Схоутена; 1-форму η , порождающую распределение D ; производную Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P , компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$.

Изначально предполагается, что выполняется условие $\partial_n \Gamma_{ac}^b = 0$. В этом случае компоненты тензора кривизны Схоутена также не зависят от последней координаты адаптированной системы: $\partial_n R_{abc}^d = 0$, что в инвариантном виде представлено равенством $L_{\vec{\xi}}R = 0$. В случае, когда $P_{ad}^c = 0$, свойства тензора Схоутена идентичны свойствам тензора кривизны симплектической связности [Gelfand, 1997].

В работе Паньженского [2007] получены инвариантные характеристики классов Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур, определяемых на касательных расслоениях почти симплектических многообразий. Настоящая работа является продолжением работы Галаева [2015]. На основе классификации Д. Чинья и С. Гонзалез [Chinea, 1990] в работе выделяются три класса почти контактных метрических структур: косимплектическая структура, структура Кенмоцу и структура класса S_{11} . Вопросам классификации почти контактных метрических многообразий посвящены также работы других авторов [Банару, 2014, Abu-Saleem, 2014, Banaru, 2015, Erken, 2015, Ozdemir, 2016].

Находятся условия, при которых продолженная структура принадлежит выделенным классам.

2. Внутренняя симплектическая связность на многообразии с контактной структурой

Рассматривается гладкое многообразие M нечетной размерности $n=2m+1$ с заданной на нем контактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, D)$, где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и векторное поле, порождающие соответственно распределения $D = \ker(\eta)$ и $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ таким образом, чтобы выполнялось равенство $TM = D \oplus D^\perp$. При этом имеет место равенство: $rk(\omega) = 2m$, где $\omega = d\eta$. Многообразие M будем называть контактным многообразием.

Пусть ∇ – внутренняя линейная связность [Галаев, 2016] на многообразии M , т.е. отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1\bar{x}+f_2\bar{y}} = f_1\nabla_{\bar{x}} + f_2\nabla_{\bar{y}}$;
- 2) $\nabla_{\bar{x}}f\bar{y} = (\bar{x}f)\bar{y} + f\nabla_{\bar{x}}\bar{y}$.
- 3) $\nabla_{\bar{x}}(\bar{y} + \bar{z}) = \nabla_{\bar{x}}\bar{y} + \nabla_{\bar{x}}\bar{z}$,

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, 2m; i, j, k = 1, \dots, 2n-1$) многообразия M назовем адаптированной к распределению D , если $\frac{\partial}{\partial x^n} = \bar{\xi}$ [Букушева, 2017]. Векторные поля $P(\partial_a) = \bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, где $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D : $D = span(\bar{e}_a)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются как коэффициенты разложения $\nabla_{\bar{e}_a}\bar{e}_b = \Gamma_{ab}^c\bar{e}_c$. Формула преобразования для коэффициентов внутренней связности $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'}A_b^{b'}A_c^{c'}\Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'}\bar{e}_a A_b^{b'}$ определяется из соотношения $\bar{e}_a = A_a^{a'}\bar{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля [Галаев, 2016]:

$$S(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla_{\bar{x}}\bar{y} - \nabla_{\bar{y}}\bar{x} - P[\bar{x}, \bar{y}],$$

$$R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} = \nabla_{\bar{x}}\nabla_{\bar{y}}\bar{z} - \nabla_{\bar{y}}\nabla_{\bar{x}}\bar{z} - \nabla_{P[\bar{x}, \bar{y}]}\bar{z} - P[Q[\bar{x}, \bar{y}], \bar{z}],$$

где $Q = I - P$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ будем называть тензором кривизны контактного многообразия.

Компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах выражаются равенствами [Galaev, 2015, 2018]:

$$R_{cab}^d = 2\bar{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d\Gamma_{b]c}^e, \quad R(\bar{e}_a, \bar{e}_b)\bar{e}_c = R_{cab}^d\bar{e}_d.$$

Известно [Галаев, 2015], что на контактном многообразии существует внутренняя симплектическая связность без кручения, сохраняющая 2-форму ω . Такую связность будем называть внутренней симплектической связностью. Внутренних симплектических связностей бесконечно много. Зафиксируем одну из них и обозначим ее коэффициенты Γ_{ac}^b .

Предложение 1. На многообразии с допустимой симплектической структурой существует внутренняя симплектическая связность такая, что $\partial_n\Gamma_{ac}^b = 0$.

Доказательство. Действительно, с одной стороны $d\omega = 0$, т.к. $\omega = d\eta$. С другой стороны имеют место равенства [Галаев, 2015]:

$$3d\omega(\bar{e}_a, \bar{e}_b, \bar{e}_c) = \bar{e}_a\omega_{bc} + \bar{e}_b\omega_{ca} + \bar{e}_c\omega_{ab},$$

$$3d\omega(\bar{e}_a, \bar{e}_b, \partial_n) = \partial_n\omega_{ab}.$$

Тем самым получаем, что $\partial_n \omega_{ab} = 0$. Пусть для произвольной внутренней связности $\tilde{\nabla}$ без кручения выполняется равенство $\partial_n \tilde{\Gamma}_{bc}^a = 0$. Тогда легко проверить, что внутренняя связность ∇ , определяемая равенством

$$\Gamma_{ac}^b = \tilde{\Gamma}_{ac}^b + \frac{1}{2} \omega^{db} \tilde{\nabla}_a \omega_{cd},$$

является внутренней симплектической связностью, для которой справедливо равенство $\partial_n \Gamma_{ac}^b = 0$. Последнее условие не зависит от выбора адаптированной системы координат.

3. Свойства тензора кривизны Схоутена внутренней симплектической связности

В случае когда $\partial_n \Gamma_{ac}^b = 0$, компоненты тензора кривизны Схоутена также не зависят от последней координаты адаптированной системы: $\partial_n R_{abc}^d = 0$. В инвариантном виде последнее равенство переписывается в виде $L_{\xi} R = 0$. В этом случае свойства тензора Схоутена идентичны свойствам тензора кривизны симплектической связности [Gelfand, 1997]. Тензор с компонентами $\partial_n \Gamma_{ac}^b = 0$ получил название тензора Вагнера-Схоутена и наряду с тензором Схоутена относится к внутренним инвариантам контактного многообразия с внутренней симплектической связностью.

Пусть $R_{abcd} = \omega_{ae} R_{bcd}^e = \omega(\bar{e}_a, R(\bar{e}_c, \bar{e}_d)\bar{e}_b)$.

Предложение 2. Для компонент тензора кривизны Схоутена внутренней симплектической связности выполняются равенства $R_{abcd} = R_{bacd}$.

Доказательство. Имеем: $\bar{e}_a \bar{e}_b \omega_{cd} = \bar{e}_a (\omega(\nabla_{\bar{e}_b} \bar{e}_c, \bar{e}_d) + \omega(\bar{e}_c, \nabla_{\bar{e}_b} \bar{e}_d))$.

Альтернируя последнее равенство по индексам a, b , и учитывая, что $\partial_n \omega_{ab} = 0$ и $\partial_n \Gamma_{ac}^b = 0$, убеждаемся в справедливости равенства $R_{abcd} = R_{bacd}$.

Пользуясь тем, что $\partial_n R_{abc}^d = 0$, убеждаемся в справедливости аналога первого тождества Бьянки для тензора Схоутена: $R_{abcd} = R_{acdb} = R_{adbc}$.

Полученные выше тождества понадобятся нам в следующем разделе для нахождения коэффициентов связности Леви-Чивита продолженной почти контактной метрической структуры.

4. Продолженные почти контактные метрические структуры на распределениях контактных многообразий с внутренней симплектической связностью

Распределение D контактного многообразия является гладким многообразием размерности $2n-1$. Векторные поля

$$(\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$$

определяют [Галаев, 2016] на распределении D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$$

– соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:



$$\begin{aligned}
 [\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] &= 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R_{bad}^c\partial_{n+c}, \\
 [\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] &= x^{n+d}\partial_n\Gamma_{ad}^c\partial_{n+c}, \\
 [\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] &= \Gamma_{ab}^c\partial_{n+c},
 \end{aligned}$$

где R_{bad}^c – компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах.

Имеет место

Предложение 3 [Галаев, 2016]. Пусть ∇ – внутренняя симплектическая связность с тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Тогда для всех $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства:

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v, \tag{1}$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v, \tag{2}$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v, \tag{3}$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v. \tag{4}$$

Определим на многообразии D эндоморфизм J и метрический тензор g , полагая:

$$\begin{aligned}
 J\vec{x}^h &= \vec{x}^v, \quad J\vec{x}^v = -\vec{x}^h, \quad J\partial_n = 0, \\
 g &= \omega_{ab}dx^a \otimes \theta^{n+b} - \omega_{ab}\theta^{n+a} \otimes dx^b + \theta^n \otimes \theta^n.
 \end{aligned}$$

Предложение 4. Структура $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, где $\tilde{D} = \ker(\lambda)$, $\vec{u} = \partial_n$ определяет на многообразии D почти контактную метрическую структуру. Будем в дальнейшем называть структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ продолженной структурой.

Справедливость предложения 4 подтверждается следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
 g(J\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b) &= g(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = 0 = g(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b), \\
 g(J\vec{\varepsilon}_a, J\partial_{n+b}) &= -g(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b) = \omega_{ab} = g(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}).
 \end{aligned}$$

Предложение 5. Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивита на почти контактном метрическом многообразии D , тогда ее ненулевые коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ в адаптированных координатах получают следующее представление:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \Gamma_{ab}^c, \\
 2\tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} &= \omega^{dc}(R_{bad} + R_{abd} + R_{dab}), \\
 \tilde{\Gamma}_{ab}^n &= \omega_{ba}, \\
 \tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} &= \Gamma_{ab}^c.
 \end{aligned}$$

Здесь $R_{abd} = x^{n+c}R_{cabd}$.

Доказательство предложения 5 опирается на равенства (1)-(4), а также на формулу для нахождения коэффициентов связности:

$$2\Gamma_{ij}^m = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где $\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}$, $\Omega_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}$, $\Omega_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c$, $\Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}$.

Найдем координатное представление фундаментальной формы $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, J\vec{y})$.
Имеем:

$$\begin{aligned}\Omega(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) &= g(\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b) = g(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = \omega_{ab}, \\ \Omega(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= 0, \\ \Omega(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) &= -g(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b) = \omega_{ab}, \\ \Omega(\partial_{n+a}, \cdot) &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, ненулевые компоненты формы Ω в адаптированных координатах определяются равенствами:

$$\Omega_{ab} = \Omega_{n+a, n+b} = \omega_{ab}.$$

Выделим три класса почти контактных метрических структур:

- 1) косимплектическая структура – $\tilde{\nabla}J = 0$;
- 2) структура Кенмоцу – $(\tilde{\nabla}J)\vec{y} = g(J\vec{x}, \vec{y})\vec{u} - \lambda(\vec{x})J\vec{y}$;
- 3) структура класса C_{11} – $(\nabla_{\vec{x}}\Omega)(\vec{y}, \vec{z}) = -\lambda(\vec{x})(\nabla_{\vec{u}}\Omega)(J\vec{y}, J\vec{z})$.

Предложение 4 используется для доказательства следующих теорем.

Теорема 1. Множество продолженных почти контактных метрических структур $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, g, D)$ не содержит в себе косимплектических структур и структур Кенмоцу.

Доказательство. В адаптированном базисе выполняются следующие соотношения:
 $J_a^{n+b} = \delta_a^b$, $J_{n+a}^b = -\delta_a^b$. Отсюда получаем:

$$\tilde{\nabla}_a J_{n+b}^n = \tilde{\Gamma}_{ad}^n J_{n+b}^d = -\tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ab}.$$

Для контактного многообразия равенство $\omega_{ab} = 0$ не выполняется, что указывает на отсутствие среди продолженных структур косимплектических структур.

Далее, с одной стороны,

$$(\tilde{\nabla}_a J)\partial_{n+b} = \omega(\varepsilon_a, \varepsilon_b)\partial_n + \frac{1}{2}\omega^{cd}(R_{bad} + R_{abd} + R_{dab})\partial_{n+c}.$$

С другой стороны,

$$g(J\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = g(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = 0.$$

Что и доказывает теорему.

Теорема 2. Продолженная почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, g, D)$ принадлежит классу C_{11} тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$R_{bad} + R_{abd} + R_{dab} = 0.$$

Доказательство. Заметим, что правая часть равенства $(\nabla_{\vec{x}}\Omega)(\vec{y}, \vec{z}) = -\lambda(\vec{x})(\nabla_{\vec{u}}\Omega)(J\vec{y}, J\vec{z})$ тождественно равна нулю, т.к. $(\nabla_{\vec{u}}\Omega)(J\vec{y}, J\vec{z}) = 0$. Далее, проводя необходимые вычисления, получаем

$$\tilde{\nabla}_a \Omega_{n+b, c} = -\tilde{\Gamma}_{ac}^{n+d} \omega_{bd} = \frac{1}{2}\omega^{de}(R_{cae} + R_{ace} + R_{eac})\omega_{bd} = \frac{1}{2}(R_{cab} + R_{acb} + R_{bac}),$$

что и доказывает теорему.

4. Заключение

Полученные в настоящей статье результаты следует рассматривать как вклад в развитие геометрии продолженных структур. В отличие от геометрии касательного расслоения, имеющей богатую историю исследования, геометрия распределения многообразия с контактной структурой становится предметом изучения в последнее время. Стимулом для исследования геометрии продолженных структур может служить возможность использования многообразия D в качестве модельного пространства в задачах неголономной механики и теоретической физики. Если M – субриманово многообразии контактного типа, то на его распределении D естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, позволяющая придать инвариантный характер аналитическому описанию механики со связями. На многообразии D определяется геодезическая пульверизация связности над распределением – векторное поле, проекции интегральных кривых которого совпадают с допустимыми геодезическими – траекториями движения механической системы со связями [Bukusheva, 2011]. Есть все основания предполагать, что геометрия продолженных структур может быть использована в теории Калуцы-Клейна. Заметим также, что задание продолженной структуры эквивалентно заданию продолженной связности. Продолженная связность [Bukusheva, 2011] – это связность с кручением, естественным образом возникающая на субримановых многообразиях с дополнительными структурами – почти контактной метрической, би-метрической и т.д., и находящая применение в теоретической физике.

Список литературы

References

1. Банару М.Б. 2014. Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 3: 60–62.
Banaru M.B. 2014. Pochti kontaktnye metrichekские giperpoverhnosti s tipovym chislom 1 ili 0 v priblizhenno kelerovyh mnogoobraziyah [Almost contact metric hypersurfaces with type number 0 or 1 in nearly-Kählerian manifolds]. Moscow University Mathematics Bulletin, 69 (3): 132–134 .
2. Букушева А.В. 2015. О геометрии контактных метрических пространств с ϕ -связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 17 (214) (40): 20–24.
Bukusheva A.V. 2015. O geometrii kontaktnyh metrichekских prostranstv s ϕ -svyaznost'yu [The geometry of the contact metric spaces ϕ -connection]. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 17 (214) (40): 20–24 (in Russian).
3. Букушева А.В. 2014. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 14 (3): 247-251.
Bukusheva A.V. 2014. Sloeniya na raspredeleniyah s finslerovoj metrikoy [Foliation on distribution with Finslerian metric]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 14 (3): 247-251 (in Russian).
4. Букушева А.В. 2012. О геометрии слоений на распределениях с финслеровой метрикой. Известия Пензенского педагогического университета им. В.Г. Белинского (Серия физико-математические и технические науки), 30: 33-38.
Bukusheva A.V. 2012. O geometrii sloenij na raspredeleniyah s finslerovoj metrikoy [On the Geometry of Foliations on Distributions with Finsler Metric]. Izv. Penz. Pedagog. Univ. (Ser. fiz.-matem. i tekhn. nauki), 30: 33-38.
5. Букушева А.В., Галаев С.В. 2013. Связности над распределением и геодезические пульверизации. Известия высших учебных заведений. Математика, 4: 10-18.
Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2013. Connections on distributions and geodesic sprays. Russian Mathematics. 57(4): 7-13.



6. Букушева А.В., Галаев С.В. 2017. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 48: 32–41.
Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2017. Geometriya pochti kontaktnyh giperkehlerovykh mnogoobrazij [Geometry of an almost contact hyper-Kähler manifolds]. *Differentsialnaya geometriya mnogoobrazij figur*, 48: 32–41.
7. Галаев С.В., Шевцова Ю.В. 2015. Почти контактные метрические структуры, определяемые симплектической связностью над распределением. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 15 (2): 136–141.
Galaev S.V., Shevtsova Yu.V. 2015. Pochti kontaktnye metricheskie struktury, opredelyaemye simplekticheskoy svyaznost'yu nad raspredeleniem [Almost contact metric structures defined by a symplectic structure over a distribution]. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 15 (2): 136–141 (in Russian).
8. Галаев С.В. 2016. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств. Чебышевский сборник, 17, 3 (59): 53–63.
Galaev S.V. 2016. Obobshchennyj tenzor krivizny Vagnera pochti kontaktnyh metricheskih prostranstv [Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces]. *Chebyshevskii Sbornik*, 17, 3(59): 53–63 (in Russian).
9. Галаев С.В. 2016. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой. Вестник Башкирского университета, 21 (3): 551–555.
Galaev S. V. 2016. Gladkie raspredeleniya s dopustimoy giperkompleksnoj psevdo-ehrmitovoj strukturoj [Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-hermitian structure]. *Vestnik Bashkirskogo Universiteta*, 21 (3): 551–555 (in Russian).
10. Галаев С.В. 2016. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 16 (3): 263–272.
Galaev S.V. 2016. Dopustimye giperkompleksnye struktury na raspredeleniyah sasakievyh mnogoobrazij [Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds]. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 16 (3): 263–272 (in Russian).
11. Паньженский В.И., Сухова О.В. 2007. Почти эрмитовы структуры на касательном расслоении почти симплектического многообразия. Известия высших учебных заведений. Математика, 11: 75–78.
Panzhensky V.I., Sukhova O.V. 2007. Pochti ehrmitovy struktury na kasatel'nom rassloenii pochti simplekticheskogo mnogoobraziya [Almost Hermitian structures on the tangent bundle of an almost symplectic manifold]. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 51 (11): 73–75.
12. Abu-Saleem A., Banaru M.B. 2014. On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 8 (1): 35–46.
13. Banaru M.B., Banaru G.A. 2015. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series 3: Mathematics, Informatics, Physics*. 8 (57) (2): 21–28.
14. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2011. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics*, 4 (2): 13–22.
15. Chinea D., Gonzalez C. 1990. Classification of almost contact metric structures. *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)*. V. CLVI. P. 15–36.
16. Erken I.K., Dacko P., Murathan C. 2015. Almost a-paracosymplectic manifolds. *J. Geom. Phys.* 88: 30–51.
17. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*. 31 (1): 35–46.
18. Galaev S.V. 2018. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 39 (1): 71–76.
19. Gelfand I., Retakh V., Shubin M. 1997. Fedosov Manifolds, Symplectic Geometry Workshop, Toronto.
20. Ozdemir N, Aktay S, Solgun M. 2016. Almost Hermitian structures on the products of two almost contact metric manifolds. *Differ Geom Dyn Syst.*, 18: 102–109.

УДК 517.19

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-41-51

**ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ
ТРЕХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА ОДНОЙ ШЕСТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ**

**INVARIANT SYSTEMS OF THREE SECOND-ORDER
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SIX-DIMENSIONAL LIE
ALGEBRA**

**В. О. Лукашук, К. Р. Кадырова
V.O. Lukashchuk, K.R. Kadyrova**

Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия, 450008 г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12

Ufa State Aviation Technical University,
12 K. Marx St., Ufa, 450008, Russia

Email: voluks@gmail.com

Аннотация

Решается задача построения реализаций шестимерной алгебры Ли с двумя ненулевыми коммутационными соотношениями в пространстве дифференциальных операторов первого порядка, зависящих от четырех переменных и нахождения соответствующих инвариантных систем трёх обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для представителя каждого из найденных классов неподобных алгебр Ли операторов определяется число дифференциальных инвариантов второго порядка и дополнительных инвариантных соотношений. Приводится пример, иллюстрирующий возможность использования полученных результатов для интегрирования систем трёх обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Abstract

We consider a six-dimensional Lie algebra with two nonzero commutation relations. We proved that there are 21 types of such non-similar Lie algebras in the space of first-order differential operators on a space of four variables. Then we construct canonical forms of basis operators for the realizations in the space of four variables of these types of non-similar Lie algebras. The number of second-order differential invariants and additional invariant relations was calculated for each basis operators. The general forms of the corresponding invariant systems of three second-order ordinary differential equations are obtained for fifteen non-similar Lie algebras. An illustrative example is given to show how the results can be used for integration of a system of three second-order ordinary differential equations admitting considered six-dimensional Lie algebra.

Ключевые слова: алгебра Ли, дифференциальные инварианты, инвариантная система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Keywords: Lie algebra, differential invariants, invariant system of ordinary differential equations.

Введение

Групповой анализ, появившийся впервые во второй половине девятнадцатого века в работах Софуса Ли, и сегодня является одним из эффективных методов интегрирования дифференциальных уравнений и их систем. С. Ли [2011] предложил ряд методов,

позволяющих найти решение и понизить порядок дифференциального уравнения, используя допускаемую им алгебру Ли симметрий. В частности, им был разработан метод канонических переменных, который позволяет проинтегрировать в квадратурах обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка, допускающее двумерную алгебру Ли. Данный метод основан на использовании классификации двумерных неподобных алгебр Ли.

Построение классов обыкновенных дифференциальных уравнений базируется на классификациях допускаемых ими неподобных алгебр Ли в пространствах различной размерности. Задачи о выделении представителей неподобных классов алгебр Ли решались, например, в работах P.J. Olver [1992], В.М. Бойко [2003]. В работах F.M. Mahomed [1989], Н.Х. Ибрагимова [1994], P.G.L. Leach [2003], С. В. Хабилова [2010] подобие алгебр Ли операторов используется для анализа симметричных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе ищется общий вид системы трёх ОДУ второго порядка

$$\ddot{x} = f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad \ddot{y} = g(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad \ddot{z} = h(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad (1)$$

допускающей шестимерную алгебру Ли. Такие системы часто встречаются при моделировании динамики взаимодействия различных типов природных объектов, поэтому методы, позволяющие проинтегрировать или исследовать свойства системы, имеют весомое значение для приложений. Свойства подобия алгебр Ли для исследования систем ОДУ использовались в работах F. M. Mahomed [2001, 2013], Н. Х. Ибрагимова [2010], С. В. Мелешко [2015, 2017], Р. К. Газизова [2017a], А. А. Гайнетдиновой [2017].

В данной работе на основе известной классификации неизоморфных шестимерных алгебр Ли, приведенной в [Мубаракзянов, 1963], строится реализация одной шестимерной алгебры Ли с двумя ненулевыми коммутационными соотношениями в пространстве четырех переменных. Выписываются представители всех неподобных классов такой алгебры, и для каждого из них устанавливается количество дифференциальных инвариантов второго порядка и дополнительных инвариантных соотношений, если таковые имеются, а также строятся соответствующие инвариантные системы вида (1). В заключение приводится пример, иллюстрирующий возможность использования результатов классификации для интегрирования систем трёх ОДУ второго порядка.

В работе, следуя [Ovsyannikov, 1982], используется обозначение: $\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$.

Реализация неподобных шестимерных алгебр Ли в пространстве четырех переменных

Рассматривается шестимерная алгебра Ли с двумя ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_3] = X_2. \quad (2)$$

Решается задача построения реализаций этой алгебры в пространстве дифференциальных операторов первого порядка от четырёх переменных

$$X_i = \xi^i(t, x, y, z) \partial_t + \eta_1^i(t, x, y, z) \partial_x + \eta_2^i(t, x, y, z) \partial_y + \eta_3^i(t, x, y, z) \partial_z, \quad (i = 1, \dots, 6), \quad (3)$$

и выделения среди них представителей классов неподобных алгебр Ли.

Для решения задачи используются результаты работы [Boyko et al, 2003] – реализации четырехмерной алгебры Ли с аналогичными ненулевыми коммутационными соотношениями в том же пространстве. А именно, дополняя каждую из таких неподобных алгебр Ли [Boyko et al, 2003] операторами X_5, X_6 и удовлетворяя нулевым

коммутационным соотношениям с этими операторами, строятся все неподобные шестимерные алгебры Ли с коммутационными соотношениями (2). Например, рассмотрим алгебру Ли с операторами [Войко et al, 2003]:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t + x\partial_x, \quad X_4 = \partial_y.$$

Подставляя X_5, X_6 в виде (3) в коммутационные соотношения $[X_i, X_j] = 0, i = 1, \dots, 4, j = 5, 6$, находим

$$X_5 = \eta_2^5(z)\partial_y + \eta_3^5(z)\partial_z, \quad X_6 = \eta_2^6(z)\partial_y + \eta_3^6(z)\partial_z.$$

Из последнего коммутационного соотношения $[X_5, X_6] = 0$ получаем систему

$$\eta_2^5(z) \frac{d\eta_2^6(z)}{dz} = \eta_3^6(z) \frac{d\eta_2^5(z)}{dz}, \quad \eta_3^5(z) \frac{d\eta_3^6(z)}{dz} = \eta_3^6(z) \frac{d\eta_3^5(z)}{dz}, \quad (4)$$

связывающую функции $\eta_2^5(z), \eta_3^5(z), \eta_2^6(z), \eta_3^6(z)$. Её решение зависит от вида функций $\eta_2^5(z), \eta_3^6(z)$. Рассмотрим различные возможные случаи.

Пусть $\eta_3^5(z) \neq 0, \eta_3^6(z) \neq 0$, тогда из системы (4) имеем

$$\eta_3^6(z) = C\eta_3^5(z), \eta_2^6(z) = C\eta_2^5(z), \quad C = Const,$$

то есть операторы X_5 и X_6 линейно зависимы, а алгебра Ли становится пятимерной.

Пусть $\eta_3^5(z) \neq 0, \eta_3^6(z) = 0$, тогда из системы (4) получаем

$$\eta_2^6(z) = Const \quad \text{и} \quad X_6 = \partial_y,$$

то есть операторы X_4 и X_6 совпадают, а алгебра Ли снова становится пятимерной.

Аналогично, алгебра Ли будет пятимерной, если $\eta_3^6(z) \neq 0, \eta_3^5(z) = 0$.

Пусть $\eta_3^5(z) = \eta_3^6(z) = 0$, тогда $\eta_2^5(z)$ и $\eta_2^6(z)$ будут произвольными функциями, отличными от константы, поскольку в противном случае алгебра Ли будет пятимерной. Выделим одного представителя в найденном классе алгебр. Для этого сделаем замену переменных в операторах:

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + \psi(z), \quad \bar{z} = \phi(z),$$

сохраняющую вид операторов X_1, X_2, X_3, X_4 . Выбирая $\phi(z) = \eta_2^5(z)$, получим

$$X_1 = \partial_{\bar{t}}, \quad X_2 = \partial_{\bar{x}}, \quad X_3 = \bar{t}\partial_{\bar{t}} + \bar{x}\partial_{\bar{x}}, \quad X_4 = \partial_{\bar{y}},$$

$$X_5 = \bar{z} \partial_{\bar{y}}, \quad X_6 = \phi'(\bar{z}) \partial_{\bar{y}}, \quad (\phi''(\bar{z}) \neq 0).$$

Остальные алгебры этого класса при помощи замены переменных

$$\bar{t} = \theta(t, x, y, z), \quad \bar{x} = \kappa(t, x, y, z), \quad \bar{y} = \psi(t, x, y, z), \quad \bar{z} = \phi(t, x, y, z), \quad \frac{\partial(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial(t, x, y, z)} \neq 0 \quad (5)$$

могут быть приведены к найденному представителю.

Аналогичным образом были найдены представители всех неподобных шестимерных алгебр Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями (2) в пространстве \mathbf{R}^4 . Таким образом, справедлива



Теорема. Базис неподобных шестимерных алгебр Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями (2) в пространстве \mathbf{R}^4 подходящей заменой переменных (5) может быть приведен к одному из 21 типов, перечисленных в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Базисы в \mathbf{R}^4 неподобных шестимерных алгебр Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями $[X_1 X_3] = X_1, [X_2 X_3] = X_2$

Bases in \mathbf{R}^4 of non-similar six-dimensional Lie algebras with nonzero commutation relations

$$[X_1 X_3] = X_1, [X_2 X_3] = X_2$$

Тип	Базисные операторы	Примечание
1	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x, X_4 = \partial_y,$ $X_5 = z\partial_y, X_6 = \varphi(z)\partial_y$	$\varphi'' \neq 0$
2	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = z\partial_y,$ $X_5 = \varphi_1(z)\partial_y, X_6 = \varphi_2(z)\partial_y$	$\varphi_1''\varphi_2'' \neq 0,$ φ_1, φ_2 л.н.з.*
3	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = e^y\partial_t, X_6 = e^y\partial_x$	-
4	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t + ze^y\partial_x,$ $X_5 = e^y\varphi_1(z)\partial_t + e^y\varphi_2(z)\partial_x,$ $X_6 = e^y\varphi_3(z)\partial_t + e^y\varphi_4(z)\partial_x$	$\varphi_1'\varphi_3' \neq 0, \varphi_2''\varphi_4'' \neq 0,$ (φ_1, φ_3) и (φ_2, φ_4) л.н.з.*
5	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\varphi_1(z)\partial_t + ze^y\partial_x, X_6 = e^y\varphi_2(z)\partial_t + e^y\varphi_3(z)\partial_x$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3'' \neq 0,$ (φ_1, z) и (φ_2, φ_3) л.н.з.*
6	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = ze^y\partial_t + e^y\partial_x, X_6 = e^y\varphi_1(z)\partial_t + e^y\varphi_2(z)\partial_x$	$\varphi_1''\varphi_2' \neq 0$
7	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\partial_x, X_6 = e^y\varphi(z)\partial_t + ze^y\partial_x$	$\varphi' \neq 0$
8	$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\partial_x, X_6 = ze^y\partial_t$	-
9	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = \varphi_1(x)\partial_z, X_6 = \varphi_2(x)\partial_y + \varphi_3(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3' \neq 0,$ φ_1, φ_3 л.н.з.*
10	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = \varphi_1(x)\partial_y + \varphi_2(x)\partial_z, X_6 = \varphi_3(x)\partial_y + \varphi_4(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_3' \neq 0, \varphi_2'\varphi_4' \neq 0,$ (φ_1, φ_3) и (φ_2, φ_4) л.н.з.*
11	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \partial_z,$ $X_5 = e^y\varphi_1(x)\partial_t + \varphi_2(x)\partial_z, X_6 = e^y\varphi_3(x)\partial_t + \varphi_4(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_3' \neq 0, \varphi_2'\varphi_4' \neq 0,$ (φ_1, φ_3) и (φ_2, φ_4) л.н.з.*
12	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = z\partial_y,$ $X_5 = \varphi_1(x, z)\partial_y, X_6 = \varphi_2(x, z)\partial_y$	$\varphi_{1zz}\varphi_{2zz} \neq 0,$ φ_1, φ_2 л.н.з.*

Окончание табл. 1
The End of Table 1

13	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5 = \partial_z, X_6 = \varphi_2(x)\partial_y + \varphi_3(x)\partial_z$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3' \neq 0,$ φ_1, φ_2 л.н.з.*
14	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5 = \varphi_2(x)\partial_y, X_6 = \varphi_3(x)\partial_y$	$\varphi_1'\varphi_2'\varphi_3' \neq 0,$ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ л.н.з.*
15	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5 = \partial_z, X_6 = \varphi_2(x)\partial_y$	$\varphi_1'\varphi_2'' \neq 0,$ φ_1, φ_2 л.н.з.*
16	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = \varphi_1(x)\partial_y,$ $X_5 = z\partial_y, X_6 = \varphi_2(x,z)\partial_y$	$\varphi_1' \neq 0,$ $\varphi_{2x} + \varphi_{2zz} \neq 0$
17	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\varphi(x)\partial_t, X_6 = \partial_z$	$\varphi' \neq 0$
18	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\varphi_1(x)\partial_t, X_6 = e^y\varphi_2(x)\partial_t$	$\varphi_1'\varphi_2' \neq 0,$ φ_1, φ_2 л.н.з.*
19	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t + \partial_y, X_4 = e^y\partial_t,$ $X_5 = e^y\varphi_1(x)\partial_t + \varphi_2(x)\partial_z, X_6 = \partial_z$	$\varphi_1'\varphi_2' \neq 0$
20	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t, X_4 = \partial_y, X_5 = \varphi(x)\partial_y, X_6 = \partial_z$	$\varphi' \neq 0$
21	$X_1 = \partial_t, X_2 = x\partial_t, X_3 = t\partial_t, X_4 = \partial_y,$ $X_5 = z\partial_y, X_6 = \varphi(x,z)\partial_y$	$\varphi_x + \varphi_{zz} \neq 0$

* Сокращение л.н.з. означает линейно независимы.

Инвариантные системы трёх обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Найдем системы ОДУ вида (1), допускающие алгебры Ли из табл. 1. Например, для операторов $X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, X_4 = \partial_z, X_5 = e^y\partial_t, X_6 = e^y\partial_x$ (тип 3 из табл. 1) общий дифференциальный инвариант второго порядка имеет вид:

$$I = I\left(\frac{\dot{z}}{\dot{y}}, \frac{\dot{y}^2 + \ddot{y}}{\dot{y}^3 e^y}, \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}(\dot{y}^2 + \ddot{y})}{\dot{y}^3 e^y}, \frac{\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}(\dot{y}^2 + \ddot{y})}{\dot{y}^3}\right).$$

Следовательно, инвариантную систему ОДУ, допускающую алгебру Ли указанного типа, можно записать как

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^y \left(\alpha \left(\frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right) \dot{x} + \beta \left(\frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right) \right), \quad \ddot{y} = -\dot{y}^2 + \dot{y}^3 e^y \alpha \left(\frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right), \quad \ddot{z} = \dot{y}^2 \left(\alpha \left(\frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right) e^y \dot{z} + \gamma \left(\frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right) \right),$$

где α, β, γ – произвольные функции своих аргументов. Взяв линейную комбинацию последних двух уравнений, можно найти её решение.

Рассмотрим операторы типа 1 из табл. 1. Их общий дифференциальный инвариант второго порядка

$$I = I\left(z, \dot{x}, \frac{\ddot{x}}{\dot{z}}, \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\right) \quad (6)$$

зависит только от двух дифференциальных инвариантов второго порядка.

Проведем дополнительное исследование данной алгебры, следуя работам Газизова Р.К., Гайнетдиновой А.А. [2017a, 2017b]. Составим три матрицы: $\Omega^{(0)}$ – матрица, состоящая из координат базисных операторов, записанных в строку, $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ – матрицы, состоящие из координат базисных операторов, продолженных до первых и вторых производных, соответственно. Имеем

$$\Omega^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & x & 0 & 0 & 0 & -\dot{y} & -\dot{z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & \dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(z) & 0 & 0 & \dot{z}\varphi'(z) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & x & 0 & 0 & 0 & -\dot{y} & -\dot{z} & -\ddot{x} & -2\ddot{y} & -2\ddot{z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & \dot{z} & 0 & 0 & \ddot{z} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(z) & 0 & 0 & \dot{z}\varphi'(z) & 0 & 0 & \ddot{z}\varphi'(z) + \dot{z}^2\varphi''(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\Omega^{(0)}$ выписана по базисным операторам, действующим в пространстве четырех независимых переменных, а ее ранг равен трем ($\text{rg } \Omega^{(0)} = 3$), поэтому рассматриваемая алгебра Ли имеет один инвариант. Матрица $\Omega^{(1)}$ выписана по первым продолжениям базисных операторов, действующих в пространстве семи независимых переменных, и $\text{rg } \Omega^{(1)} = 5$, поэтому алгебра имеет два инварианта не выше первого порядка: один уже указанный инвариант и один дифференциальный инвариант первого порядка. Аналогично, матрица $\Omega^{(2)}$ выписана по вторым продолжениям базисных операторов, действующих в пространстве десяти независимых переменных, и $\text{rg } \Omega^{(2)} = 6$, поэтому алгебра дополнительно имеет только два дифференциальных инварианта второго порядка.

Таким образом, анализ рангов подтверждает вид найденного общего дифференциального инварианта второго порядка (6). Приведем матрицу $\Omega^{(2)}$ к ступенчатому виду:

$$\Omega^{(2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dot{y} & -\dot{z} & -\ddot{x} & -2\ddot{y} & -2\ddot{z} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{z} & 0 & 0 & \ddot{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{z}^2\varphi''(z) & 0 \end{pmatrix}.$$



Чтобы понизить ранг матрицы $\Omega^{(2)}$, положим выражение в последней строке матрицы равным нулю. Это и есть инвариантное соотношение, дополняющее нашу систему ОДУ. Поскольку $\varphi''(z) \neq 0$, получим $\dot{z} = 0$. Инвариантная система для данной алгебры Ли запишется в виде:

$$\ddot{x} = \dot{z}\alpha(z, \dot{x}), \quad \ddot{z} = \dot{z}^2\beta(z, \dot{x}), \quad \dot{z} = 0, \quad \ddot{y} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0,$$

то есть алгебра Ли типа 2 из табл. 1 допускается только тривиальной системой.

Таким образом, по рангам матриц $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ для каждой неподобной алгебры Ли табл. 1 установлено количество дифференциальных инвариантов второго порядка и инвариантных соотношений. Результаты приведены в табл. 2. Из табл. 2 видно, что только четыре типа алгебры Ли с ненулевыми коммутационными соотношениями (2) имеют три дифференциальных инварианта второго порядка, то есть допускаются нетривиальной системой трёх ОДУ второго порядка. Однако, в силу большого количества произвольных функций в операторах, не для всех алгебр Ли удаётся построить инвариантные системы вида (1).

Таблица 2
Table 2

Зависимость количества дифференциальных инвариантов второго порядка и инвариантных соотношений от рангов матриц $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$

The number of second-order differential invariants and invariant relations with respect to ranks of matrices $\Omega^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$

Тип	rg $\Omega^{(0)}$	rg $\Omega^{(1)}$	rg $\Omega^{(2)}$	Количество дифференциальных инвариантов второго порядка	Количество дополнительных условий
1	3	5	6	2	1
2	3	5	6	2	1
3	4	6	6	3	-
4	3	5	6	2	1
5	3	5	6	2	1
6	3	5	6	2	1
7	3	5	6	2	1
8	3	5	6	2	1
9	3	6	6	3	-
10	3	6	6	3	-
11	3	5	6	2	1
12	2	4	6	1	2
13	3	6	6	3	-
14	2	4	6	1	2



Окончание табл. 2

The End of Table 2

15	3	5	6	2	1
16	2	4	6	1	2
17	3	4	5	2	1
18	2	3	4	2	1
19	3	5	6	2	1
20	3	5	6	2	1
21	2	4	6	1	2

Таким образом, кроме приведённых выше, были найдены инвариантные системы ОДУ второго порядка и дополнительные соотношения для следующих типов алгебры Ли из табл. 1:

тип 2: $\ddot{x} = \dot{z}\alpha(z, \dot{x}), \quad \ddot{z} = \dot{z}^2\beta(z, \dot{x}), \quad \left(\varphi_2''(z) - \varphi_1''(z) \left(\frac{\varphi_2'(z)z - \varphi_2(z)}{\varphi_1'(z)z - \varphi_1(z)} \right) \right) \dot{z}^2 = 0;$

тип 8: $\ddot{x} = \dot{y}^2 e^y \left(\alpha \left(z, \frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right) \dot{x} + \beta \left(z, \frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right) \right), \quad \ddot{y} = -\dot{y}^2 + \dot{y}^3 e^y \alpha \left(z, \frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right), \quad \ddot{z} = -2\dot{y}\dot{z} + \dot{y}^2 \dot{z} e^y \alpha \left(z, \frac{\dot{z}}{\dot{y}} \right),$

тип 9: $\ddot{x} = \dot{x}^3 \alpha(x) e^\theta, \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \beta(x) + \frac{\dot{x} \varphi_2''(x) \dot{y}}{\varphi_2'(x)} + \dot{x}^2 \dot{y} \alpha(x) e^\theta,$

$$\ddot{z} = \dot{x}^2 \gamma(x) + \frac{\dot{x} \varphi_1''(x) \dot{z}}{\varphi_1'(x)} + \frac{\dot{x} \dot{y} (\varphi_1'(x) \varphi_3''(x) - \varphi_1''(x) \varphi_3'(x))}{\varphi_1'(x) \varphi_2'(x)} + \dot{x}^2 \dot{z} \alpha(x) e^\theta, \quad \text{где } \theta = y - \frac{\dot{y} \varphi_2}{\dot{x} \varphi_2'};$$

тип 10: $\ddot{x} = \dot{x}^3 \alpha(x) e^\theta,$

$$\ddot{y} = \dot{x}^2 \beta(x) + \frac{\dot{x} \varphi_3''(x) (\varphi_1'(x) \dot{z} - \dot{y} \varphi_2'(x)) - \dot{x} \varphi_1''(x) (\varphi_3'(x) \dot{z} - \dot{y} \varphi_4'(x))}{\varphi_4'(x) \varphi_1'(x) - \varphi_3'(x) \varphi_2'(x)} + \dot{x}^2 \dot{y} \alpha(x) e^\theta,$$

$$\ddot{z} = \dot{x}^2 \gamma(x) + \frac{\dot{x} \varphi_4''(x) (\varphi_1'(x) \dot{z} - \dot{y} \varphi_2'(x)) - \dot{x} \varphi_2''(x) (\varphi_3'(x) \dot{z} - \dot{y} \varphi_4'(x))}{\varphi_4'(x) \varphi_1'(x) - \varphi_3'(x) \varphi_2'(x)} + \dot{x}^2 \dot{z} \alpha(x) e^\theta,$$

$$\text{где } \theta = y - \frac{\dot{y} (\varphi_1 \varphi_4' - \varphi_3 \varphi_2') + \dot{z} (\varphi_3 \varphi_1' - \varphi_1 \varphi_3')}{\dot{x} (\varphi_4'(x) \varphi_1'(x) - \varphi_3'(x) \varphi_2'(x))};$$

тип 13: $\ddot{x} = \dot{x}^3 \alpha(x) e^\theta,$

$$\ddot{y} = \dot{x}^2 \beta(x) - \frac{\dot{x} (\varphi_2'(x) \dot{z} - \dot{y} \varphi_3'(x)) \varphi_1''(x)}{\varphi_3'(x) \varphi_1'(x)} + \frac{\dot{x} \varphi_2''(x) \dot{z}}{\varphi_3'(x)} + \dot{x}^2 \dot{y} \alpha(x) e^\theta,$$

$$\ddot{z} = \dot{x}^2 \gamma(x) + \frac{\dot{x} \varphi_3''(x) \dot{z}}{\varphi_3'(x)} + \dot{x}^2 \dot{z} \alpha(x) e^\theta, \text{ где } \theta = y - \frac{\dot{z}(\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_2'(x)\varphi_1(x)) + \dot{y}\varphi_3'\varphi_1}{\dot{x}\varphi_3'(x)\varphi_1'(x)};$$

типы 14 и 15: $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0;$

тип 16: $\dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z} = \dot{x}^3 \alpha\left(x, z, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right), \dot{x}z\varphi_1'(x) - \dot{z}\varphi_1(x) = 0, \varphi_1''(x)\dot{z} - \dot{x}\varphi_1'(x)\alpha\left(x, z, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right) = 0;$

тип 17: $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \dot{x}^3 \alpha\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right), \dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z} = \dot{x}^3 \beta\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right), \dot{y}^2 + \dot{x}^2 \alpha\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right) = 0;$

тип 18: $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \dot{x}^3 \alpha\left(x, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right), \dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z} = \dot{x}^3 \beta\left(x, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right), \dot{y}^2 + \dot{x}^2 \alpha\left(x, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right) = 0;$

тип 19: $\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \dot{x}^3 \alpha\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right), \dot{x}\ddot{z} - \ddot{x}\dot{z} = \frac{\dot{x}^2 \dot{z}(\varphi_2''(x))}{\varphi_2'(x)} + \dot{x}^3 \beta\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right), \dot{y}^2 + \dot{x}^2 \alpha\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0;$

тип 20: $\ddot{x} = 0, \dot{y} = \dot{x}\dot{y} \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} + \dot{x}^2 \alpha\left(x, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right), \ddot{z} = \dot{x}^2 \beta\left(x, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right);$

тип 21: $\ddot{x} = 0, \dot{y} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}\varphi_x(x, z)} \left(\dot{x}^2 \varphi_{xx}(x, z) + 2\dot{x}\dot{z}\varphi_{xz}(x, z) + \dot{z}^2 \varphi_{zz}(x, z) \right) + \dot{x}^2 \alpha\left(x, z, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\right),$
 $\ddot{z} = \frac{\dot{z}}{\dot{x}\varphi_x(x, z)} \left(\dot{x}^2 \varphi_{xx}(x, z) + 2\dot{x}\dot{z}\varphi_{xz}(x, z) + \dot{z}^2 \varphi_{zz}(x, z) \right)$

Заключение. Пример использования результатов работы

Результаты работы могут быть использованы как обобщение канонического метода Ли на системы ОДУ вида (1). Пример, приводимый далее, является иллюстрацией применения этого метода Ли.

Рассмотрим систему трёх ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{2\dot{x}^2}{x} + \frac{\dot{x}^2}{x^2} - \frac{\dot{x}^4 e^{x^{-1}}}{x^6(x\dot{z} + \dot{x}z)}, \\ \ddot{y} = \frac{2\dot{x}\dot{y}}{x^2} - \frac{\dot{x}(x\dot{z} + \dot{x}z)}{x^2} - \frac{\dot{x}^3 \dot{y} e^{x^{-1}}}{x^6(x\dot{z} + \dot{x}z)}, \\ \ddot{z} = -\frac{2\dot{x}^2 z}{x^2} - \frac{\dot{x}^2 z}{x^3} - \frac{2\dot{x}\dot{z}}{x} - \frac{\dot{x}^3 \dot{z} e^{x^{-1}}}{x^6(x\dot{z} + \dot{x}z)}, \end{cases} \quad (7)$$

которая допускает шестимерную алгебру Ли с операторами:

$$X_1 = \partial_t, X_2 = e^{-x^{-1}} \partial_y, X_3 = t\partial_t - x^2 \partial_x + xz\partial_z, X_4 = x^{-1} \partial_z, X_5 = e^{x^{-1}} \partial_t, X_6 = \partial_y. \quad (8)$$

Ненулевые коммутационные соотношения данной алгебры Ли совпадают с исследуемыми в работе соотношениями (2). Следовательно, операторы алгебры (8)



подобны операторам одного из типов табл. 1. Используя хорошо известную формулу замены переменных в операторах [Ли, Шефферс, 2011], находим замену переменных $\tau = t$, $u = ye^{x^{-1}}$, $v = x^{-1}$, $w = xz$, приводящую операторы к каноническому виду 3 из табл. 1. Выполняя замену в системе (7), приводим её к виду

$$\ddot{u} = \dot{v}^2 e^v \left(\frac{\dot{v}}{\dot{w}} \dot{u} + \frac{\dot{w}}{\dot{v}} \right), \quad \ddot{v} = -\dot{v}^2 + e^v \frac{\dot{v}^4}{\dot{w}}, \quad \ddot{w} = \dot{v}^3 e^v,$$

который легко интегрируется:

$$\tau = \frac{1}{C_1}(1+v) + C_3 e^v + C_6, \quad u = \frac{C_1}{2} e^{2v} + C_5 e^v - C_2, \quad w = C_1 e^v + C_4,$$

где C_1, \dots, C_6 – постоянные интегрирования. Сделав обратную замену переменных в этом решении, можно получить решение исходной системы (7).

Список литературы References

1. Гайнетдинова А.А. 2017. Исследование систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с шестью симметриями. В кн.: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017. Материалы научной конференции (Санкт-Петербург, 10-14 апреля 2017 г.). СПб., Изд-во Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена: 52–58.

Gajnetdinova A.A. 2017. Issledovanie sistem dvuh obyknovennykh differencial'nykh uravnenij tret'ego poryadka s shest'yu simmetriyami. V kn.: Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Gercenovskie chteniya – 2017. Materialy nauchnoj konferencii (Sankt-Peterburg, 10-14 aprelya 2017 g.). SPb., Izd-vo Rossijskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A. I. Gercena: 52–58. (in Russian)

2. Ли С., Шефферс Г. 2011. Симметрии дифференциальных уравнений. Том 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. М.-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика: 704.

Li S., Sheffers G. 2011. Simmetrii differencial'nykh uravnenij. Tom 1. Lekcii o differencial'nykh uravneniyah s izvestnymi infinitezimal'nymi preobrazovaniyami. M.-Izhevsk, Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika: 704. (in Russian)

3. Мубаракзянов Г.М. 1963. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом. Известия вузов. Математика. (4): 104–116.

Mubarakzyanov G.M. 1963. Klassifikaciya razreshimyh algebr Li shestogo poryadka s odnim nenil'potentnym bazisnym ehlementom. Izvestiya vuzov. Matematika. (4): 104–116. (in Russian)

4. Ayub M., Khan M., Mahomed F. M. 2013. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability. Journal of Applied Mathematics. 2013(ID 147921): 1-15.

5. Boyko V. M., Popovych R. O., Nesterenko M. O., Lutfullin M. W. 2003. Realizations of real low-dimensional Lie algebras. Journal of Physics A: Mathematical and General. 36(26): 7337–7360.

6. Gainetdinova A.A., Gazizov R.K. 2017a. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras. Proceedings of the Royal Society A. 473(2197, ID 20160461):1-13.

7. Gazizov R.K., Gainetdinova A.A. 2017b. Operator of invariant differentiation and its application for integrating systems of ordinary differential. Ufa Mathematical Journal. 9 (4): 12–21.

8. Gazizov R. K., Ibragimov N.H., Lukashchuk V.O. 2010. Integration of ordinary differential equation with a small parameter via approximate symmetries: reduction of approximate symmetry algebra to a canonical form. Lobachevskii Journal of Mathematics. 31(2):141–151.

9. Gonzalez-Lopez A., Kamran N., Olver P.J. 1992. Lie algebras of differential operators in two complex variables. American Journal of Mathematics 114:1163–1185.

10. Ibragimov N.H., Nucci M.C. 1994. Integration of third order differential equations by Lie's method: Equations admitting three-dimensional Lie algebras. *Lie Groups and Their Applications*. 1: 49–64.
11. Khabirov S.V. 2010. Classification of three-dimensional Lie algebras in \mathbb{R}^3 and their second-order differential invariants. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 31(2): 152–156.
12. Leach P.G.L. 2003. Equivalence classes of second-order ordinary differential equations with only a three-dimensional Lie algebra of point symmetries and linearisation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 284: 31–48.
13. Mahomed F.M., Leach P.G.L. 1989. Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Physics*. 30(12): 2770–2777.
14. Oguis G.F., Moyo S., Meleshko S.V. 2017. Complete group classification of systems of two nonlinear second-order ordinary differential equations of the form $y''=F(y)$. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 44:318–333.
15. Ovsyannikov L.V. 1982. *Group analysis of differential equations*. New York, Academic Press, 416.
16. Suksern S., Moyo S., Meleshko S.V. 2015. Application of group analysis to classification of systems of three second-order ordinary differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 38(18):5097–5113.
17. Wafo Soh C., Mahomed F.M. 2001. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations. *Journal of Physics A*. 34(13): 2883–2911.



УДК 517.43

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-52-63

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И РЕЗОЛЬВЕНТЫ
ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА 4-ГО ПОРЯДКА
С ТРЕХКРАТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ КОРНЕМ**

**INVESTIGATION OF THE SPECTRUM AND RESOLVENT
OF A FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL SHEAF
WITH A TRIPLE CHARACTERISTIC ROOT**

**Э.Г. Оруджев¹, С.А. Алиев²
E.G. Orudzhev¹, S.A. Aliev²**

¹Бакинский государственный университет
Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23

²Нахичеванский Институт Учителей
Азербайджан, AZ7000, г.Нахичевань, пр. Гейдара Алиева, 1

¹Baku State University,
23 Academic Zahid Khalilov St., Baku, AZ1148, Republic of Azerbaijan

²Nakhchivan Teachers Institute,
1 Heydar Aliyev Ave., AZ7000, Republic of Nakhchivan

E-mail: elsharorucov63@mail.ru

E-mail: sahil.liyev83@mail.ru

Аннотация

В данной работе исследуется спектр и резольвента пучка дифференциальных операторов четвертого порядка в пространстве $L_2(0; \infty)$, когда главный характеристический полином имеет один трехкратный корень. Показано, что пучок может иметь в открытой нижней и открытой верхней полуплоскостях конечное или счетное число собственных значений, а непрерывный спектр заполняет всю действительную ось, где могут находиться спектральные особенности. Доказано, что резольвента пучка является ограниченным интегральным оператором, определенным на всем пространстве $L_2(0; \infty)$, с ядром типа Карлемана.

Abstract

The article is considered that, the spectrum and the resolvent of a structure of fourth-order differential operators are investigated in space $L_2(0; \infty)$, when one triple root is the main characteristic polynomial. It is shown that, a sheaf can have a finite or countable number of eigenvalues in the open lower and open upper half-planes, and the continuous spectrum fills the all real axis, where spectral singularities are located. It is proved that, the sheaf resolvent is a bounded integral operator, defined on the whole space $L_2(0; \infty)$, with a Carleman type kernel.

Ключевые слова: спектр, собственная функция, резольвента, сопряженный оператор, ядро типа Карлемана.

Keywords: spectrum, eigen function, resolvent, adjoint operator, Carleman type kernel.

Введение и постановка задачи

В пространстве $L_2(0, \infty)$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов L_λ^α , порожденный дифференциальным выражением

$$l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right)Y \equiv \left(\frac{d}{dx} - i\lambda\right)^3 \left(\frac{d}{dx} + i\lambda\right)Y + r(x)\frac{dy}{dx} + (\lambda p(x) + q(x))Y = 0, \quad (1)$$

и граничными условиями

$$U_\nu(Y) \equiv \alpha_{\nu 0}Y(0, \lambda) + \alpha_{\nu 1}Y'(0, \lambda) + \alpha_{\nu 2}Y''(0, \lambda) + \alpha_{\nu 3}Y'''(0, \lambda) = 0, \quad \nu = \overline{1, 3} \quad (2)$$

где λ - спектральный параметр, $r(x), p(x), q(x)$ - комплекснозначные функции, определенные и непрерывные на $[0, \infty)$, соответственно, имеющие непрерывные производные до порядка 3, 4, 5 включительно, и также сходятся интегралы

$$\int_0^\infty x^4 |r^{(s)}(x)| dx < \infty, s = \overline{0, 3}; \int_0^\infty x^4 |p^{(s)}(x)| dx < \infty, s = \overline{0, 5}; \int_0^\infty x^4 |q^{(s)}(x)| dx < \infty, s = \overline{0, 4}; \quad (3)$$

$\alpha_{\nu k}$ фиксированные комплексные числа такие, что формы $U_\nu(Y)$ линейно независимы, а число граничных условий меняется в зависимости от местонахождения параметра λ в комплексной плоскости, здесь $\nu = \overline{1, 3}, k = \overline{0, 3}$.

Спецификой пучка L_λ^α является то, что главный характеристический многочлен уравнения (1) имеет трехкратный корень i и простой корень $-i$. В общем случае кратных корней этого многочлена формальные решения уравнения с полиномиальным вхождением λ могут содержать дробные степени параметра, как в показателе экспоненты, так и при множителе экспоненты, и сама структура асимптотических представлений этих решений не только зависит от старших коэффициентов, но и алгебраических комбинаций коэффициентов при низких степенях параметра [Оруджев, 1998]. Эти свойства здесь учтены таким образом, что формальные решения не содержат дробные степени параметра.

Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов на конечном отрезке, в случае различных корней главного характеристического многочлена, изучены достаточно хорошо. Наиболее полные исследования вопроса о возможности разложения функций в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям несамосопряженных дифференциальных пучков с регулярными и нерегулярными краевыми условиями проведены в работах Г.Д. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М.А. Наймарка, М.В. Келдыша, А.Г. Костюченко, В.А. Ильина, В.А. Марченко, М.Г. Гасымова, М.Л. Расулова, А.А. Шкаликова и др. [Оруджев, 1999, с.14]. В частности, вопросы кратной полноты системы собственных и присоединенных функций подобных пучков решены в зависимости от расположения этих корней. При этом существенным условием кратной полноты является расположение характеристических корней на различных лучах, исходящих из начала координат. При нарушении этого условия данная система присоединенных функций обладает бесконечным дефектом в смысле кратной полноты [Вагабов, 1987; Богомолова, Печенцов, 1989; Гасымов, Магеррамов, 1982].

Дифференциальные пучки, заданные на бесконечных интервалах также изучены довольно хорошо в случае различных характеристических корней. И, здесь обнаружен такой эффект, что число граничных условий на левом конце, в случае полуоси, также зависит от местонахождения параметра λ и связано с расположением корней характеристического полинома. Соответствующий несамосопряженный пучок не является

аналитической функцией параметра λ во всей комплексной плоскости [Фунтаков, 1961; Максудов и др., 1990], но является аналитической функцией от λ в верхней и нижней полуплоскостях с разрезом вдоль вещественной оси.

Ввиду того, что рассматриваемый здесь пучок имеет один трехкратный корень, который лежит на ординатной оси, на луче, выходящем из начала координат, необходимо провести специальное исследование этого пучка. Результаты разложения по собственным функциям непрерывных и дискретных спектров (когда кратности характеристических корней равны и они симметрично расположены относительно начала координат) получены в работах [Orudzhev, 1999; Оруджев, 1997; Mirzoyev, et al., 2012].

В работах Алиева и Оруджева [Aliyev, 2013; Orudzhev, Aliyev, 2014] исследовано уравнение (1) и построены операторы преобразования, переводящее решения уравнения

$$\left(\frac{d}{dx} - i\lambda\right)^3 \left(\frac{d}{dx} + i\lambda\right) Y = 0 \text{ в решения уравнения (1). В частности, в [Orudzhev, Aliyev, 2014]}$$

доказано, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $Y_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, 4}$, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [Y_j(x, \lambda) - x^{j-1} e^{i\lambda x}] &= 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \text{Im } \lambda \geq 0; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [Y_j(x, \lambda) - e^{-i\lambda x}] &= 0, \quad \text{Im } \lambda \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Там же, доказано, что существуют ядра $K_j^\pm(x, t)$, такие, что

$$\begin{aligned} Y_j(x, \lambda) &= x^{j-1} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_j^+(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \text{Im } \lambda \geq 0 \\ Y_4(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty K_4^-(x, t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \text{Im } \lambda \leq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

при этом $K_j^\pm(x, t)$, $j = \overline{1, 4}$ удовлетворяют уравнениям

$$l\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \pm i \frac{\partial}{\partial t}\right) K_j^\pm(x, t) dt = 0, \quad (6)$$

и имеет место

$$\lim_{x+t \rightarrow \infty} \frac{\partial^{\alpha+\beta} K_j^\pm(x, t)}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} = 0, \quad \alpha + \beta \leq 4, \quad \int_x^\infty |K_j^\pm(x, t)|^2 dt < \infty, \quad (7)$$

Кроме того, функции $K_j^\pm(x, t)$ и их производные удовлетворяют определенным интегральным условиям на характеристике $t = x$.

В данной работе исследуется структура спектра пучка L_λ^α , строится ядро её резольвенты и изучаются аналитические свойства ядра.

Заметим, что для пучка L_λ^α не удастся применить технику работы [Фунтаков, 1961] в том отношении, что применяемый там подход предельного перехода при $b \rightarrow \infty$ для оператора L_λ^α , порожденного дифференциальным выражением (1) в конечном интервале $(0, b)$ и некоторыми регулярными распадающимися краевыми условиями на концах этого интервала основывается на оценке ядра резольвенты. Ввиду того, что эти краевые условия являются нерегулярными [Оруджев, 1998] для пучка $L_{\lambda b}^\alpha$, с привлечением тонких свойств оператора $L_{\lambda b}^\alpha$ таких, как, например, поведение ядра резольвенты $(L_{\lambda b}^\alpha)^{-1}$ при $b \rightarrow \infty$ вне малой окрестности спектра, не позволительно использовать этот подход при выводе интегрального представления резольвенты пучка L_λ^α .

Дискретный спектр пучка L_λ^α . Обозначим через D совокупность всех функций $Y(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ таких, что: 1) производные $Y^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\nu = \overline{0, 3}$ существуют и

абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, b]$, $b > 0$, при каждом $\lambda : \pm \text{Im} \lambda \geq 0$; 2) $l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right)Y \in L_2(0, \infty)$. Далее, через D_α обозначим совокупность тех функций из D , для которых выполняется условие (2). Определим L_λ^α так: область определения есть D_α и $L_\lambda^\alpha = l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right)Y$ при $Y \in D$. Обозначим $A(\lambda) = \det\|U_i(Y_k)\|_{i,k=1}^3$ и рассмотрим верхнюю полуплоскость $\lambda : \text{Im} \lambda \geq 0$. В её открытой части решения $Y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1,3}$ принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$, а $Y_4(x, \lambda) \notin L_2(0, \infty)$. Если λ находится в открытой нижней полуплоскости, то ни одно из решений $Y_k(x, \lambda)$, где $k = \overline{1,3}$ не принадлежит этому пространству, а $Y_4(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$. Тогда собственные значения пучка L_λ^α в открытой верхней полуплоскости определяются из уравнения $A(\lambda) = 0$.

Собственные значения этого пучка в открытой нижней полуплоскости могут определяться одним краевым условием $U_\nu(Y_4) = 0$, где ν может быть одним из чисел $1, 2, 3$. А на действительной оси ни одно из решений $Y_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1,4}$ не принадлежит пространству $L_2(0, \infty)$, следовательно, при $\text{Im} \lambda = 0$, ни одно из краевых условий не входит в D_λ^α . Значит, на действительной оси пучок дифференциальных операторов L_λ^α не имеет собственных значений. Действительно, если фиксируем λ_0 с $\text{Im} \lambda = 0$, и будем считать, что оно является собственным значением, тогда для решений из $\text{Im} \lambda \geq 0$, будем иметь $Y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^3 C_k Y_k(x, \lambda)$ и $Y(x, \lambda_0) \in L_2(0, \infty)$, при этом хотя бы одно из чисел C_k , $k = \overline{1,3}$ должно быть отлично от нуля. Но, при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$Y(x, \lambda_0) = \{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + o(1)\} e^{i\lambda_0 x}.$$

Поэтому

$$\int_0^N |Y(x, \lambda_0)|^2 dx = \int_0^N |C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + o(1)|^2 dx = C_1^2 \cdot N + C_2^2 \cdot \frac{N^3}{3} + C_3^2 \cdot \frac{N^5}{5} + o(1). \quad (8)$$

Если $Y(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, тогда все C_k , где $k = 0, 1, 2$ должны равняться нулю, т.е. $Y(x, \lambda_0) = 0$, а это означает, что соответственно к λ_0 не существует нетривиального решения. Приближаясь к действительной оси из открытой нижней полуплоскости и из условия, что $Y_4(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, $Y_k(x, \lambda) \notin L_2(0, \infty)$, где $k = 1, 2, 3$, $\text{Im} \lambda < 0$, проверяется, что на действительной оси не имеются собственные значения. Теперь предположим, что λ_0 является точкой открытой верхней и открытой нижней полуплоскостей.

Теорема 1. Для того, чтобы $\lambda_0 : +\text{Im} \lambda > 0$ являлась собственным значением пучка L_λ^α необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию $A(\lambda_0) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что число λ_0 из открытой верхней полуплоскости является собственным значением оператора L_λ^α . Тогда решение уравнения (1), принадлежащее пространству $L_2(0, \infty)$ является линейной комбинацией решений $Y_k(x, \lambda_0)$, $k = 1, 2, 3$:

$$Y(x, \lambda_0) = C_1 Y_1(x, \lambda_0) + C_2 Y_2(x, \lambda_0) + C_3 Y_3(x, \lambda_0), \quad (9)$$

где C_i - определенные коэффициенты, $i = \overline{1,3}$ с другой стороны $Y(x, \lambda_0)$ как решение уравнения (1) из $L_2(0, \infty)$, должно удовлетворять краевым условиям (2). Подставляя (9) в (2), получаем:

$$\sum_{k=1}^3 C_k U_\nu(Y_k) = 0, \nu = \overline{1,2,3}. \quad (10)$$

Для того, чтобы (10) имело ненулевое решение относительно C_k , $k = \overline{1,3}$, должно быть $A(\lambda_0) = 0$.

Достаточность. Предположим, что $A(\lambda_0) = 0$. Тогда система (10) имеет нетривиальную систему решений $\{C_1, C_2, C_3\}$, причем $|C_1| + |C_2| + |C_3| \neq 0$. Разрешая систему (10), затем подставляя найденные решения в (9), находим функцию $Y(x, \lambda_0) \in D_\lambda$ для которой $l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda_0\right)Y = 0$, т.е. λ_0 является собственным значением пучка L_α . Теорема доказана.

Подобным образом получаем, что в открытой нижней полуплоскости имеются собственные значения, которые являются корнями уравнения $B(\lambda) \equiv U_\nu(Y_4) = 0$, где ν одно из чисел $\overline{1,2,3}$.

Теорема 2. *Оператор L_λ^α в открытой верхней и в открытой нижней полуплоскостях имеет собственные значения, которые являются, соответственно, корнями уравнений $A(\lambda) = 0$ и $B(\lambda) = 0$. Этот оператор не имеет собственных значений на действительной оси. Если числа λ_0 и λ_1 с $\text{Im}\lambda_0 = 0$ и $\text{Im}\lambda_1 = 0$, соответственно, являются корнями уравнения $A(\lambda) = 0$ и $B(\lambda) = 0$, тогда эти числа являются спектральными особенностями пучка L_λ^α .*

Предположим, что λ_μ является собственным значением пучка L_λ^α . Тогда соответствующая собственная функция определяется из формулы $Y_\mu(x) = \sum_{k=1}^3 C_k Y_k(x, \lambda_\mu)$. Положим $C_3 = 1$. Тогда, из краевых условий (2), находим:

$$\sum_{k=1}^2 C_k U_\nu(Y_k) + U_\nu(Y_3) = 0, \nu = \overline{1,2,3}. \quad (11)$$

Ввиду того, что мы ищем ненулевые решения, ранг этой системы должен быть меньше 3. Пусть $\text{rang} = 2$. Тогда при условии, что

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(Y_1) & U_1(Y_2) \\ U_2(Y_1) & U_2(Y_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

из системы

$$\begin{cases} C_1 U_1(Y_1) + C_1 U_1(Y_2) = -U_1(Y_3) \\ C_1 U_2(Y_1) + C_2 U_2(Y_2) = -U_2(Y_3) \end{cases} \quad (12)$$

можно определить C_i , $i = \overline{1,2}$. Для них $C_i = -\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$, $i = \overline{1,2}$. Здесь $\Delta_i(\lambda)$ получается из

$\Delta_0(\lambda)$ заменой элементов столбца с номером i на элементы $\{-U_1(Y_3), -U_2(Y_3)\}'$.

Таким образом, собственная функция, отвечающая собственному значению λ_μ , выражается формулой

$$Y_\mu(x) = -\sum_{i=1}^2 \frac{\Delta_i}{\Delta_0} Y_i(x, \lambda_\mu) + Y_3(x, \lambda_\mu) \tag{13}$$

Непосредственным вычислением с использованием формулы Лейбница для дифференцирования производных, из формул (5) перенумерацией Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , на $Y_0^+, Y_1^+, Y_2^+, Y_0^-$, получаем

$$\begin{aligned} (Y_j^\pm(x, \lambda))^{(k)} &= e^{\pm i\lambda x} \sum_{v=0}^k (\pm i)^v \lambda^v C_k^v (x^j)^{(k-v)} + \\ &+ e^{\pm i\lambda x} \sum_{\mu=0}^k \lambda^\mu g_{\mu,k,j}^\pm(x) + \int_x^\infty \frac{\partial^k K_j^\pm(x,t)}{\partial x^k} e^{\pm i\lambda t} dt, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} g_{kk0}^\pm &= 0, \quad g_{0,1,j}^\pm = -K_j^\pm(x, x), \quad g_{1,2,j}^\pm = \mp K_j^\pm(x, x), \quad K_j^\pm(x, x) = \\ &= \pm \frac{1}{8i} \int_x^\infty \xi^j p(\xi)(\xi - x) d\xi + \frac{1}{8} \int_x^\infty \xi^j r(\xi)[i - \xi] d\xi, \\ \frac{d}{dx} K_j^\pm(x, x) &= \mp \frac{1}{8i} \int_x^\infty \xi^j p(\xi) d\xi - \frac{1}{8} (i - x) x^j r(x) \\ g_{02j}^\pm(x) &= -\frac{d}{dx} K_j^\pm(x, x) - \frac{\partial K_j^\pm(x,t)}{\partial x} \Big|_{t=x}, \\ g_{23j}^\pm(x) &= \pm i g_{12j}^\pm(x), \quad g_{13j}^\pm(x) = g_{12j}^\pm(x)' \pm i g_{02j}^\pm(x). \end{aligned}$$

Используя оценки $\frac{\partial^k K_j^\pm(0,t)}{\partial x^k} \Big|_{x=0}$, $k = \overline{0,1,2,3}$ [Orudzhev, Aliyev, 2014], подставляя

(14) в (2), убеждаемся, что функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, соответственно, являются регулярными функциями в верхней и нижней полуплоскостях, следовательно, нули этих функций образуют конечное или счетное множество.

Теорема 3. *Операторный пучок L_λ^α может иметь лишь конечное или счетное число собственных значений, образующих ограниченное множество в комплексной λ -плоскости с разрезом вдоль вещественной оси. Предельные точки этого множества могут находиться только на вещественной оси.*

Резольвента и непрерывный спектр пучка L_λ^α . Теперь построим явный вид резольвенты $R_\lambda^{(\pm)\alpha}$ дифференциального пучка $L_\lambda^{(\pm)\alpha}$ в каждой полуплоскости $\pm \text{Im} \lambda > 0$ в отдельности. Предположим, что область определения резольвенты $R_\lambda^{(\pm)\alpha}$ содержит функции $f(x)$, равные нулю вне произвольного конечного интервала $[0, a]$. Положим, $R_\lambda^{+\alpha} f = Y$, т.е. $L_\lambda Y = f$. Это означает, что $Y(x, \lambda)$ есть решение уравнения

$$l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) Y = f \tag{15}$$

для любой функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Это решение принадлежит $L_2(0, \infty)$ и удовлетворяет краевым условиям (2). Имея фундаментальные системы решений $Y_i(x, \lambda)$, $k = \overline{1,4}$ однородного дифференциального уравнения (1), методом вариации

произвольных постоянных находим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (15). Общее решение ищем в виде

$$Y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(x, \lambda). \quad (16)$$

Согласно этому методу, предположим, что C_1, C_2, C_3, C_4 являются функциями от x . Вычисляя все производные до 4-го порядка включительно, выражения (16) и подчиняя дополнительным условиям, получаем некоторую систему уравнений относительно $C_i'(x)$, $i = \overline{1,4}$. Решая полученную систему, относительно $C_i'(x)$ имеем

$$C_i'(x) = Z_{5-i}^+(x, \lambda) f(x), \quad (17)$$

где

$$Z_{5-i}^+(x, \lambda) = \frac{W_i(x, \lambda)}{W(x, \lambda)}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (18)$$

Здесь $W(x, \lambda)$ определитель Вронского от $Y_1(x, \lambda), Y_2(x, \lambda), Y_3(x, \lambda), Y_4(x, \lambda)$, а $W_i(x, \lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента $Y_i^{(3)}(x, \lambda)$ в вронскиане $W(x, \lambda)$. Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $Z_i^+(x, \lambda), i = \overline{1,4}$ являются решениями уравнения $l^*\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right)Z = 0$, транспонированного к уравнению (1). Из (17) получаем

$$C_i(x) = C_i + \int_0^x Z_{5-i}^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16), имеем

$$Y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^4 \left[C_i + \int_0^x Z_{5-i}^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x, \lambda). \quad (20)$$

В открытой верхней полуплоскости $Y_i(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), i = 1, 2, 3; Y_4(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), Z_1^+(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), Z_i^+(x, \lambda) \notin L_2(0, \infty), i = 2, 3, 4$. Поэтому $Y(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ возможно лишь тогда, когда сумма коэффициентов при $Y_4(x, \lambda)$ равна нулю, т.е. когда $C_4 = -\int_0^a Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi$. Подобное равенство можно также записать в виде $C_4 = -\int_0^\infty Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi$, ибо $f(x) = 0$ при $x > a$. С учетом этого, выражение (20) имеет вид

$$Y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^3 \left[C_i + \int_0^x Z_{5-i}^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x, \lambda) - \int_x^\infty Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \cdot Y_4(x, \lambda). \quad (21)$$

Отсюда

$$Y^{(v)}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^3 \left[C_i + \int_0^x Z_{5-i}^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i^{(v)}(x, \lambda) - \int_x^\infty Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \cdot Y_4(x, \lambda).$$

Поскольку из определения функции $Z_i^+(x, \lambda), i = \overline{1,4}$ следует, что

$$\sum_{i=1}^4 Y_i^{(k)}(x, \lambda) \cdot Z_{5-i}^+(x, \lambda) = 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

С помощью граничных условий имеем:

$$U_\nu(Y) = \sum_{i=1}^3 C_i U_\nu(Y_i) - \left[\int_0^\infty Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] U_\nu(Y_4) = 0,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^3 C_i U_\nu(Y_i) = \int_0^\infty Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi U_\nu(Y_4).$$

Решая эту систему уравнений относительно $C_i, i = \overline{1,3}$, получим

$$C_i = \frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)} \int_0^\infty Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \tag{22}$$

где $A(\lambda) = \det \|U_\nu(Y_k)\|_{\nu,k=1}^3 \neq 0$, $A_i(\lambda)$ определитель, полученный из $A_3(\lambda)$ заменой $U_\nu(Y_i)$ на $U_\nu(Y_4)$.

Обозначая через

$$h_i^+(x, \lambda) = \frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)} Z_1^+(x, \lambda), i = \overline{1,3}, \tag{23}$$

можем записать:

$$C_i = \int_0^\infty h_i^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi, i = 1,2,3. \tag{24}$$

Подставляя эти значения в (21), имеем:

$$Y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^x (h_i^+(\xi, \lambda) + Z_{5-i}^+(\xi, \lambda)) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x, \lambda) + \\ + \left[\sum_{i=1}^3 \int_x^\infty h_i^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x, \lambda) - \int_x^\infty Z_1^+(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \cdot Y_4(x, \lambda).$$

Обозначая через $K^+(x, t, \lambda)$ ядро резольвенты $R_\lambda^{+\alpha}$ в верхней полуплоскости

$$K^+(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 [h_i^+(\xi, \lambda) + Z_{5-i}^+(\xi, \lambda)] Y_i(x, \lambda), & \text{при } \xi < x \\ \sum_{i=1}^3 h_i^+(\xi, \lambda) Y_i(x, \lambda) - Z_1^+(\xi, \lambda) Y_4(x, \lambda), & \text{при } \xi > x, \end{cases} \tag{25}$$

и введя переобозначения

$$Z_{5-i}^+(\xi, \lambda) = \omega_i^+(\xi, \lambda), i = \overline{1,4},$$

имеем

$$K^+(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 [h_i^+(\xi, \lambda) + \omega_i^+(\xi, \lambda)] Y_{i-1}^+(x, \lambda), & \text{при } \xi < x \\ \sum_{i=1}^3 h_i^+(\xi, \lambda) Y_{i-1}^+(x, \lambda) - \omega_4^+(\xi, \lambda) Y_0^-(x, \lambda), & \text{при } \xi > x, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$h_i^+(x, \lambda) = \frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)} \cdot \omega_4^+(\xi, \lambda).$$

Из последнего выражения можем написать

$$Y(x, \lambda) = R_\lambda^{+\alpha} f = \int_0^\infty K^+(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим открытую нижнюю полуплоскость. В этой полуплоскости $Y_0^-(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, а Y_0^+, Y_1^+, Y_2^+ , не принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$. А для решений сопряженного уравнения $Z_i^-(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, $i = \overline{1,3}$; $Z_4^-(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$. В этом случае, перенумеруя $Y_0^-, Y_0^+, Y_1^+, Y_2^+$ соответственно через Y_1, Y_2, Y_4, Y_4 имеем, что $Y_1(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, $Y_i(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$. Тогда функция $Y(x, \lambda)$, выраженная в виде

$$Y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^4 \left[C_i + \int_0^x Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x, \lambda), \quad (28)$$

принадлежит $L_2(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда сумма коэффициентов функций $Y_i(x, \lambda)$, $i = 2, 3, 4$ равна нулю, то есть

$$C_i = - \int_0^\infty Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \quad i = 2, 3, 4, \quad (29)$$

где $f(x) = 0$, при $x \geq a$.

С учетом (29), выражение (28) имеет вид

$$Y(x, \lambda) = \left[C_1 + \int_0^x Z_4^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_1(x, \lambda) - \sum_{i=2}^4 \left[\int_0^x Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x, \lambda). \quad (30)$$

Отсюда

$$Y^{(k)}(x, \lambda) = \left[C_1 + \int_0^x Z_4^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_1^{(k)}(x, \lambda) - \sum_{i=2}^4 \left[\int_x^\infty Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i^{(k)}(x, \lambda).$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^4 Y_i^{(k)}(x, \lambda) \cdot Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) = 0$, $k = 0, 1, 2$, для фиксированного граничного

условия имеем $U_\nu(Y) = C_1 U_\nu(Y_1) - \sum_{i=2}^4 \left[\int_0^\infty Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] U_\nu(Y_i) = 0$, ν – фиксировано.

Отсюда

$$C_1 = \frac{1}{U_\nu(Y_1)} \cdot \sum_{i=2}^4 \left[\int_0^\infty Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \cdot U_\nu(Y_i).$$

Обозначая

$$h^-(x, \lambda) = \frac{1}{U_\nu(Y_1)} \cdot \sum_{i=2}^4 U_\nu(Y_i) Z_{5-i}^-(x, \lambda) \quad (31)$$

можем написать

$$C_1 = \int_0^\infty h^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi. \quad (32)$$

Подставляя это значение в (30), получаем:

$$\begin{aligned}
 Y(x, \lambda) = & \left[\int_0^x [h^-(\xi, \lambda) + Z_4^-(\xi, \lambda)] f(\xi) d\xi \right] \cdot Y_1(x, \lambda) + \\
 & + \left[\int_x^\infty h^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \cdot Y_1(x, \lambda) - \sum_{i=2}^4 \left[\int_x^\infty Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \cdot Y_i(x, \lambda).
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Обозначая через $K^-(x, \xi, \lambda)$ выражение:

$$K^-(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} [h^-(\xi, \lambda) + Z_4^-(\xi, \lambda)] Y_1(x, \lambda), & \text{при } \xi < x \\ h^-(\xi, \lambda) Y_1(x, \lambda) - \sum_{i=2}^4 Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) Y_i(x, \lambda), & \text{при } \xi > x, \end{cases}
 \tag{34}$$

и снова введя обозначения $Z_{5-i}^-(\xi, \lambda) = \omega_i^-(\xi, \lambda), i = \overline{1,4}$ получаем:

$$K^-(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} [h^-(\xi, \lambda) + \omega_1^-(\xi, \lambda)] Y_0^-(x, \lambda), & \text{при } \xi < x, \\ h^-(\xi, \lambda) Y_0^-(x, \lambda) - \sum_{i=2}^4 \omega_i^-(\xi, \lambda) Y_{i-2}^+(x, \lambda), & \text{при } \xi > x, \end{cases}
 \tag{35}$$

где

$$h^-(x, \lambda) = \frac{1}{U_v(Y_0^-)} \sum_{i=2}^4 U_v(Y_{i-2}^+) \cdot \omega_i^-(\xi, \lambda).$$

Введенное обозначение удобно для записи ядра в компактном виде и мы имеем следующее представление:

$$Y(x, \lambda) = \int_0^\infty K^-(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi.
 \tag{36}$$

Теорема 4. Для всех значений спектрального параметра λ из открытой верхней и открытой нижней полуплоскостей, не являющихся корнями уравнения $A(\lambda) = 0$ и $B(\lambda) = 0$, резольвента оператора L_λ^α определена на всем пространстве $L_2(0, \infty)$, в нём является ограниченным интегральным оператором, с ядрами типа Карлемана. При приближении λ к действительной оси норма резольвенты неограниченно возрастает и вся действительная ось принадлежит непрерывному спектру пучка L_λ^α .

Доказательство. В представлениях (25) и (34) ядра резольвенты, в верхней полуплоскости $Y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), j = \overline{1,3}; Y_4(x, \lambda) \in L_2(0, \infty); Z_1^+(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), Z_j^+(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), j = \overline{1,3}$, а в нижней полуплоскости $Y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), j = \overline{1,3}; Y_4(x, \lambda) \in L_2(0, \infty); Z_1^-(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), Z_j^-(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), j = \overline{1,3}$. Учитывая, что $x^j \xi^j e^{i\lambda(x-\xi)}, x^j \xi^j e^{-i\lambda(x-\xi)}$ являются доминантными членами в соответствующих выражениях, с привлечением неравенства

$$\left| \sum_{\alpha=1}^k x_\alpha \right|^2 \leq k \sum_{\alpha=1}^k |x_\alpha|^2,$$

получается оценка

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty K(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right|^2 dx < const \cdot \int_0^\infty |f(\xi)|^2 d\xi,$$

где

$$K(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} K^+(x, \xi, \lambda), & \text{при } \operatorname{Im} \lambda > 0 \\ K^-(x, \xi, \lambda), & \text{при } \operatorname{Im} \lambda < 0. \end{cases}$$

А это означает, что $K(x, \xi, \lambda)$ является ограниченным интегральным оператором на всем пространстве $L_2(0, \infty)$. Ввиду того, что ядро является ядром Гильберта-Шмидта, оно порождает вполне непрерывный оператор.

Оценки

$$\int_0^{\infty} |K(x, \xi, \lambda)|^2 dx < +\infty, \quad \int_0^{\infty} |K(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < \infty$$

типа Карлемана, получаются из асимптотических разложений функций $Y_j(x, \lambda), Z_j(x, \lambda), j = \overline{1, 4}$; из представлений (25) и (34).

Теперь возьмем $a > 0$ такое, что при $x \geq a > 0$ выполняется неравенство $0(1) < \frac{1}{2}$.

Из оценки

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |Y_k(x, \lambda)|^2 dx &= \int_a^{\infty} |x^{2(x-1)} e^{2i\lambda x} [1 + 0(1)]|^2 dx = \int_a^{\infty} x^{2(x-1)} e^{-2\operatorname{Im} \lambda x} [1 + 0(1)]^2 dx \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \int_a^{\infty} x^{2(x-1)} e^{-\operatorname{Im} \lambda x} dx, \quad k = \overline{1, 4}, \end{aligned}$$

частично интегрируя правую часть, имеем следующую оценку

$$\|R_\lambda^\alpha f\|^2 = \int_0^{\infty} |R_\lambda^\alpha f|^2 dx \geq C_\lambda^\pm \cdot \|f\|^2,$$

где C_λ^\pm является многочленом третьей степени относительно $\frac{1}{\operatorname{Im} \lambda}$.

Из этой формулы вытекает, что при приближении λ к действительной оси норма резольвенты неограниченно растет. Теперь покажем, что при $\lambda \in (-\infty; \infty)$ область определения оператора R_λ^α плотна в $L_2(0, \infty)$, т.е. область значений L_λ^α является плотной в $L_2(0; \infty)$. Предположим противное. Тогда в $L_2(0; \infty)$ будет существовать такая функция $f(x) \neq 0$, что равенство $(L_\lambda^\alpha Y, f) = 0$ (т.е. $(f, L_\lambda^{\alpha*} f) = 0$) должно выполняться для всех $Y(x, \lambda) \in D(L_\lambda^\alpha)$. А это означает, что $L_\lambda^{\alpha*} f = 0$, то есть $\bar{\lambda}$ является собственным значением оператора $(L_\lambda^\alpha)^*$. Но, тогда λ стала бы собственным значением оператора L_λ^α . Таким образом получили противоречие. Поэтому, предположение $f \neq 0$ не имеет места.

Таким образом, вся действительная ось принадлежит непрерывному спектру оператора L_λ^α . Если $A(\lambda) = 0, B(\lambda) = 0$ имеют действительные корни, тогда эти числа являются спектральными особенностями пучка L_λ^α . Теорема доказана.

Заключение

В результате проведенного анализа доказано, что рассматриваемый пучок L_λ^α имеет конечное число собственных значений из открытого верхнего и открытого нижнего полуплоскостей, непрерывный спектр заполняет действительную ось, где могут быть конечное число спектральных особенностей. Построена резольвента пучка L_λ^α в виде ограниченного интегрального оператора с ядром типа Карлемана.

Список литературы

References

1. Богомолова Е.П., Печенцов А.С. 1989. О базисных свойствах системы собственных функций краевой задачи с кратным корнем характеристического многочлена. Вестник Московского Университета, серия 1, математика, механика, 4: 17-22.
Bogomolova E.P. Pechentsov A.S. 1989. On the basic properties of the system of eigenfunctions of a boundary value problem with a multiple root of the characteristic polynomial. Vestnik Moskovskogo Universiteta, seriya 1, Mathematica, Mechanica, 4: 17-22. (in Russian)
2. Вагабов А.И. 1987. Квадратичные пучки обыкновенных дифференциальных операторов. Математические заметки, 42 (3): 381-393.
Vagabov A.I. 1987. Quadratic sheafs of ordinary differential operators. Matematicheskie Zametki, 42 (3): 381-393. (in Russian)
3. Гасымов М.Г., Магеррамов А.М. 1982. Исследование одного класса операторных пучков четного порядка. ДАН СССР, 265 (2): 277-280.
Gasymov M.G., Magerramov A.M. 1982. Study of one class of operator sheafs of even order. DAN SSSR, 265 (2): 277-280. (in Russian)
4. Максудов Ф.Г., Магеррамов А.М., Мамедов М.З. 1990. Спектральный анализ пучков дифференциальных операторов специального вида. ДАН СССР, 310 (1): 24-28.
Maksudov F.G., Magerramov A.M. Mamedov M.Z. 1990. Spectral analysis of sheaf of differential operators of a special type. DAN SSSR, 310(1): 24-28. (in Russian)
5. Оруджев Э.Г. 1997. Резольвента и спектр одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов с кратными характеристиками. Труды Института матем. и мех. АН Азербайджана, 6 (12): 148-160.
E.G.Orudzhev . 1997. Resolvent and the spectrum of a class of non-self-adjoint differential operators with multiple characteristics. Proceedings of the Institute of Mat. and fur. The Academy of Sciences of Azerbaijan, 6(12):148-160. (in Russian)
6. Оруджев Э.Г. 1998. Прямые спектральные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра. Доклады АН Азербайджана, 54 (1): 9-15.
Orudzhev E.G. 1998. Direct spectral problems for an ordinary differential equation of the 4th order, polynomially dependent on the spectral parameter. Reports of the Academy of Sciences of Azerbaijan, 54 (1): 9-15. (in Russian)
7. Оруджев Э.Г. 1999. Краевые задачи для дифференциальных уравнений четного порядка с кратными характеристиками. Доклады Академии Наук, Российская Академия Наук, 368(1), 14-17.
Orudzhev E.G. 1999. Boundary value problems for even differential equations with multiple characteristics . Doklady Akademii Nauk, Rossiyskaya Akademiya Nauk, 368(1): 14-17.
8. Фунтаков В.Н. 1961. О разложении по собственным функциям несамосопряженно дифференциального пучка произвольного порядка на полуоси $[0; \infty)$. Известия Академии Наук Азербайджанской ССР, серия физико-математических и технических наук, 1: 3-21.
Funtakov V.N. 1961 On expansion in eigenfunctions of a non-self-adjoint differential sheaf of arbitrary order on a semi-axis. Izvestiya Akademii Nauk Azerbaydjanskoy SSR, seriya fiziko-matematicheskix i technicheskix nauk, 1: 3-21. (in Russian)
9. Sahil A.Aliyev. 2013. On the existence of transformation operator for a fourth order differential equation with triple characteristics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 39:3-8.
10. Mirzoyev S.S., Orudzhev E.G., Aliyev A.R. 2012. Spectral Analysis of a Fourth Order Differential Pencil on the Whole Real Line. Doklady Mathematics, 2012, 85(1): 57-59.
11. Orudzhev E.G. 1999. Spectral analysis of differential operators with multiple characteristics on a semi-axis. Russian Mathematical Surveys 54 (2): 448-449.
12. Elshar G.Orudzhev and Sahil A.Aliyev. 2014. Construction of a kernel of the transformation operator for a fourth order differential bundle with multiple characteristics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Special Issue, 40: 351-358.



УДК 512.542

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-64-87

**О ПОДРЕШЕТКАХ РЕШЕТКИ
ЧАСТИЧНО ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ
КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

**ON SUBLATTICES OF THE LATTICE
OF PARTIALLY TOTALLY SATURATED FORMATIONS
OF FINITE GROUPS**

**В.В. Щербина, В.Г. Сафонов
V.V. Shcherbina, V.G. Safonov**

Белорусский государственный университет,
Республика Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4

Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Avenue, Minsk, 220030, Republic of Belarus

E-mail: shcherbinavv@tut.by

Аннотация

Доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка всех τ -замкнутых totally ω -насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех totally ω -насыщенных формаций конечных групп. В частности, установлена вложимость решетки всех τ -замкнутых totally насыщенных формаций в решетку всех totally насыщенных формаций, а также вложимость решетки всех τ -замкнутых totally p -насыщенных формаций в решетку всех totally p -насыщенных формаций.

Abstract

All groups under consideration are finite. The paper studies some properties of the lattice of all τ -closed totally ω -saturated formations. Using methods of V.G. Safonov and L.A. Shemetkov, we prove that for any subgroup functor τ , the lattice of all τ -closed totally ω -saturated formations is a complete sublattice of the lattice of all totally ω -saturated formations. In particular, we show that the lattice of all τ -closed totally saturated formations is a complete sublattice of the lattice of all totally saturated formations. Similarly, the lattice of all τ -closed totally p -saturated formations is a complete sublattice of the lattice of all totally p -saturated formations.

Ключевые слова: формация конечных групп, totally ω -насыщенная формация, решетка формаций, τ -замкнутая формация.

Keywords: formation of finite groups, totally ω -saturated formation, lattice of formations, τ -closed formation.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Мы придерживаемся терминологии, принятой в работах Шеметкова, Скибы и других авторов [Шеметков, 1978; Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Skiba, Shemetkov, 2000].

Одним из интенсивно развивающихся направлений теории формаций является направление, связанное с изучением внутренней структуры формаций различных типов и

их классификацией. Существенную роль в таких исследованиях играют методы и конструкции общей теории решеток, которые активно стали применяться в теории формаций после установления А.Н. Скибой [1986] модулярности решетки всех формаций. Основные результаты структурной теории формаций изложены в книгах Шеметкова, Скибы и других авторов [Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Guo, 2000; Ballester-Bolinches, Ezquerro, 2006; Воробьев, 2012]. В работах Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [1989] и А.Н. Скибы [1997], в частности, было показано, что решетка разрешимых totally насыщенных формаций является дистрибутивной. Ряд свойств решетки всех totally насыщенных формаций установлен в других работах [Воробьев, 2000; Safonov, 2006 a, b; Safonov, 2007; Сафонов, Шеметков, 2008; Safonov, 2010].

В 1999 году в теории формаций А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым был предложен подход, использующий идеи частичной [Шеметков, 1984] и кратной (totalной) [Скиба, 1984] насыщенности формации, объединенные в понятии n -кратно (totalно) ω -насыщенной формации [Skiba, Shemetkov, 2000].

Особая роль частично totalно насыщенными формаций обусловлена прежде всего тем, что большинство наиболее известных конкретных классов конечных групп являются totalно частично насыщенными формациями, и поэтому они наиболее часто применяются в различных приложениях.

В теории частично насыщенными формаций А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [2000] была установлена модулярность решетки всех n -кратно ω -насыщенных формаций при любом натуральном n . Позднее В.Г. Сафоновым [2004] была доказана модулярность решетки всех totalно ω -насыщенных формаций, а также установлена алгебраичность этой решетки. Описание минимальных totalно ω -насыщенных не X -формаций, где X – некоторая насыщенная подформация формации всех nilпотентных групп, было получено в работе Сафонова [2014].

А.Н. Скибой [1997] доказано, что решетка l_n^τ всех τ -замкнутых n -кратно насыщенными формаций является полной подрешеткой решетки l_n всех n -кратно насыщенными формаций, а решетка разрешимых totalно насыщенными формаций не является подрешеткой в решетке всех τ -замкнутых n -кратно насыщенными формаций при любом целом неотрицательном n . В совместной работе В.Г. Сафонова и Л.А. Шеметкова [2008] показано, что решетка l_∞^τ всех τ -замкнутых totalно насыщенными формаций является полной подрешеткой решетки l_∞ всех totalно насыщенными формаций.

Развивая результат работы Сафонова и Шеметкова [2008], мы докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Решетка $l_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ -замкнутых totalно ω -насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_∞^ω всех totalно ω -насыщенных формаций.*

1. Определения и обозначения

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, p и q – простые числа, $[K]A$ – полупрямое произведение группы K с некоторой группой операторов A этой группы, $AwrB$ – стандартное сплетение группы A с группой B . Для каждого множества простых чисел π через π' обозначается дополнение к π во множестве всех простых чисел. Символами $\pi(G)$ и $O_\pi(G)$ обозначаются соответственно множество всех простых делителей порядка группы G и наибольшая нормальная π -подгруппа группы G . X -группой, где X – некоторый непустой класс групп, называется



группа из X . Символы G , G_π , N_p , S_π и N_π обозначают класс всех групп, π -групп, p -групп, разрешимых π -групп и нильпотентных π -групп соответственно. Символом (1) обозначается класс всех единичных групп.

Для произвольного класса групп $F \supseteq (1)$ символ G^F обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N , что $G/N \in F$, символ G_F – произведение всех нормальных F -подгрупп группы G .

Напомним, что ωd -группа – это группа, порядок которой делится хотя бы на одно число из ω . Через $G_{\omega d}$ обозначают класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd -группой. По определению $1 \in G_{\omega d}$.

Полагают $G_{\omega d} = G_{G_{\omega d}}$, $F_p(G) = G_{G_p N_p}$.

Формация – это класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В дальнейшем символом MH обозначается, если не оговорено противное, *корадикальное произведение формаций* M и H , т. е. $MH = \{G \mid G^H \in M\}$.

Всякую функцию вида $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называют ω -*локальным спутником*.

Если $\omega = \{p\}$, то ω -локальные формации (спутники) называют p -локальными. В другом предельном случае, когда $\omega = P$ – множество всех простых чисел, символ ω опускают.

Для произвольного ω -локального спутника f полагают $LF_\omega(f) = \{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех простых } p \in \omega \cap \pi(G)\}$.

Если формация F такова, что $F = LF_\omega(f)$, то говорят, что она ω -локальна, а f – ω -локальный спутник этой формации. Если при этом все значения f лежат в F , то f называется *внутренним* (или *приведенным*) спутником.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – произвольный набор ω -локальных спутников. Через $\bigcap_{i \in I} f_i$ обозначают такой ω -локальный спутник f , что $f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Пусть f и h – ω -локальные спутники. Тогда полагают $f \leq h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Формацию F называют ω -*насыщенной*, если ей принадлежит всякая группа G , удовлетворяющая условию $G/L \in F$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.

Пусть A, B – группы, $\varphi: A \rightarrow B$ – эпиморфизм, Ω и Σ – некоторые системы подгрупп в A и B соответственно. Тогда через Ω^φ обозначается множество $\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ – множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех групп из Σ .

Пусть X – произвольный непустой класс групп и всякой группе $G \in X$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – *подгрупповой X -функтор* в смысле А.Н. Скибы [1997] (или иначе, τ – *подгрупповой функтор на X*), если для всякого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, где $A, B \in X$, выполнены включения $(\tau(A))^\varphi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ и, кроме того, для любой группы $G \in X$ имеет место

$G \in \tau(G)$. Если $X = \mathbf{G}$ – класс всех групп, то символ X опускают и говорят просто о подгрупповом функторе. Через $S\{G\}$ обозначают совокупность всех подгрупп группы G , через $S_n\{G\}$ – совокупность всех нормальных подгрупп группы G . Подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$, *единичным*, если $\tau(G) = S\{G\}$ для любой группы G . Класс групп F называется τ -замкнутым, если $\tau(G) \subseteq F$ для любой группы $G \in F$.

Напомним, что *решеткой* называется частично упорядоченное множество L , в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, обозначаемую $x \wedge y$, и точную верхнюю грань, обозначаемую $x \vee y$ [Биркгоф, 1984, с. 18]. Решетка L называется *полной*, если любое ее подмножество X имеет в L точные верхнюю и нижнюю грани. *Подрешеткой* решетки L называется подмножество $Y \subset L$, такое, что если $a \in Y, b \in Y$, то $a \wedge b \in Y$ и $a \vee b \in Y$. Подрешетка решетки сама является решеткой с теми же операциями объединения и пересечения.

Непустую систему формаций θ называют *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ , и во множестве θ имеется такая формация F , что $H \subseteq F$ для любой формации $H \in \theta$. Формации из θ называют θ -формациями. Спутник f называется θ -значным, если все его значения принадлежат θ . Символом θ^ω обозначается совокупность всех формаций, которые обладают ω -локальным θ -значным спутником.

Всякую формацию считают 0 -кратно ω -локальной. При $n \geq 1$ формацию F называют n -кратно ω -локальной, если $F = LF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$ -кратно ω -локальными формациями. Формацию F называют *тотально ω -локальной* [Скиба, 1987], если она n -кратно ω -локальна для всех n . Если при этом формация F является τ -замкнутой, то F называют *τ -замкнутой n -кратно ω -локальной* и соответственно *τ -замкнутой тотально ω -локальной*.

Ввиду теоремы 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] формация F является ω -локальной тогда и только тогда, когда она ω -насыщена. Поэтому n -кратно ω -локальные и тотально ω -локальные формации называют также *n -кратно ω -насыщенными* и соответственно *тотально ω -насыщенными формациями*.

Символом $l_{\omega_\infty}^\tau$ обозначают совокупность всех τ -замкнутых тотально ω -насыщенных формаций. Наряду с символом l_{ω_∞} для обозначения совокупности всех тотально ω -насыщенных формаций также используют символ l_∞^ω .

Пусть X – некоторая совокупность групп. Через $l_{\omega_\infty}^\tau \text{form} X$ обозначают пересечение всех τ -замкнутых тотально ω -насыщенных формаций, содержащих X . Формацию $l_{\omega_\infty}^\tau \text{form} X$ называют *τ -замкнутой тотально ω -насыщенной формацией, порожденной совокупностью групп X* . Если $X = \{G\}$, то $l_{\omega_\infty}^\tau \text{form} X = l_{\omega_\infty}^\tau \text{form} G$ называют *однопорожденной τ -замкнутой тотально ω -насыщенной формацией*.

Для любых τ -замкнутых тотально ω -насыщенных формаций M и N полагают $M \vee_{\omega_\infty}^\tau N = l_{\omega_\infty}^\tau \text{form}(M \cup N)$. Вместе с символом \vee_{ω_∞} для обозначения верхней грани в решетке $l_{\omega_\infty} = l_\infty^\omega$ также используют символ \vee_∞^ω . Ввиду теоремы 1.5.4 [Воробьев, 2012,

с. 54] множество всех τ -замкнутых totally ω -насыщенных формаций $l_{\omega_\infty}^\tau$, частично упорядоченное по включению, относительно операций $\vee_{\omega_\infty}^\tau$ и \cap является полной решеткой формаций.

ω -Локальный спутник, все значения которого – $l_{\omega_\infty}^\tau$ -формации, называется $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значным.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая система $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значных спутников. Тогда через $\vee_{\omega_\infty}^\tau(f_i \mid i \in I)$ обозначается такой спутник f , что $f(a) = l_{\omega_\infty}^\tau \text{form}(\cup_{i \in I} f_i(a))$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(a) \neq \emptyset$. В противном случае полагают $f(a) = \emptyset$.

Для всякой совокупности групп X полагают $X(F_p) = \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in X)$, если $p \in \pi(X)$ и $X(F_p) = \emptyset$, если $p \notin \pi(X)$.

Для произвольной последовательности простых чисел p_1, p_2, \dots, p_n из ω и всякой совокупности групп X класс групп $X^{p_1 p_2 \dots p_n}$ определяют следующим образом:

- 1) $X^{p_1} = (A/F_{p_1}(A) \mid A \in X)$;
- 2) $X^{p_1 p_2 \dots p_n} = (A/F_{p_n}(A) \mid A \in X^{p_1 p_2 \dots p_{n-1}})$.

Последовательность простых чисел p_1, p_2, \dots, p_n называется *подходящей для X ω -последовательностью*, если $p_1 \in \pi(X) \cap \omega$ и для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ число $p_i \in \pi(X^{p_1 p_2 \dots p_{i-1}}) \cap \omega$.

Для произвольной τ -замкнутой totally ω -насыщенной формации F через $F_{\omega_\infty}^\tau$ обозначают ее *минимальный ω -локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник*, т.е. пересечение всех ω -локальных $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значных спутников формации. Наряду с символом F_{ω_∞} для обозначения минимального ω -локального l_∞^ω -значного спутника формации F также используют символ F_∞^ω .

Для произвольной (totally) ω -насыщенной формации F через F обозначают ее *канонический (максимальный внутренний ω -локальный) спутник*. Согласно замечанию 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] (см. также замечание 1.2.17 [Воробьев, 2012, с. 23]), если $F = LF_\omega(F)$ и f – произвольный внутренний ω -локальный спутник формации F , то справедливо неравенство $f \leq F$.

Пусть p_1, p_2, \dots, p_n – некоторая подходящая для F ω -последовательность. Тогда ω -локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник $Fp_1 p_2 \dots p_n$ определим следующим образом:

- 1) Fp_1 – канонический ω -локальный спутник формации $F(p_1)$;
- 2) $Fp_1 \dots p_n$ – канонический ω -локальный спутник формации $Fp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$.

2. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций конечных групп, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 1 [Skiba, Shemetkov, 2000]. Если $F = \theta^\omega \text{form}(X)$ и f – минимальный ω -локальный θ -значный спутник формации F , то справедливы следующие утверждения:

1) $f(\omega') = \theta \text{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in X)$;

2) $f(p) = \theta \text{form}(X(F_p))$ для всех $p \in \omega$;

3) если $F = \text{LF}_\omega(h)$, спутник h является θ -значным и p – некоторый фиксированный элемент ω , то $F = \text{LF}_\omega(f_1)$, где $f_1(a) = h(a)$ для всех $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$,
 $f_1(p) = \theta \text{form}(G \mid G \in h(p) \cap F, O_p(G) = 1)$,

и, кроме того, $f_1(p) = f(p)$;

4) $F = \text{LF}_\omega(g)$, где $g(\omega') = F$ и $g(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega$.

Лемма 2 [Skiba, Shemetkov, 2000]. Пусть формация $F = \text{MH}$, где $H = \text{LF}_\omega(h)$, $M = \text{LF}_\omega(m)$ и спутники h и m являются внутренними. Тогда формация F ω -локальна и $F = \text{LF}_\omega(f)$, где $f(\omega') = F$ и

$$f(p) = \begin{cases} m(p)H, & \text{если } p \in \pi(M) \cap \omega, \\ h(p), & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(M). \end{cases}$$

Лемма 3 [Skiba, Shemetkov, 2000]. Если $F = \text{LF}_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in F \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in F$.

Лемма 4 [Скиба, 1997, с. 152]. Пусть $N_1 \times \dots \times N_k = \text{Soc}(G)$, где $k > 1$ и G – группа с $O_p(G) = 1$. Пусть M_i – наибольшая нормальная в G группа, содержащая $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_k$, но не содержащая N_i . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ факторгруппа G/M_i монолитична и ее монолит $N_i M_i / M_i$ G -изоморфен N_i и $O_p(G/M_i) = 1$;

2) $M_1 \cap \dots \cap M_k = 1$.

Лемма 5 [Safonov, 2006a; Safonov, 2007]. Пусть M – непустая наследственная формация, F – непустая τ -замкнутая формация. Тогда MF – τ -замкнутая формация.

Лемма 6 [Сафонон, 2004]. Пусть F – непустая формация, π – такое множество простых чисел, что $\pi(F) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда произведение формаций $S_\pi F$ является тотально ω -насыщенной формацией.

Из лемм 5 и 6 непосредственно вытекает

Лемма 7. Пусть F – непустая τ -замкнутая формация, π – такое множество простых чисел, что $\pi(F) \cap \omega \subseteq \pi$. Тогда произведение формаций $S_\pi F$ является τ -замкнутой тотально ω -насыщенной формацией.

Лемма 8 [Skiba, Shemetkov, 2000]. Пусть $F = \text{LF}_\omega(f)$, где $f(\omega') = F$ и $G \notin F$. Тогда либо $G^F \not\subseteq G_{\omega d}$, либо найдется такое число $p \in \pi(G^F) \cap \omega$, что $G/F_p(G) \notin f(p)$.

Лемма 9 [Skiba, Shemetkov, 2000]. Пусть θ – такая полная решетка формаций, что $\theta^\omega \subseteq \theta$ и для любой формации $H \in \theta$ формация $N_p H$ принадлежит θ для всех $p \in \omega$. Тогда если $F = \text{LF}_\omega(F) \in \theta^\omega$, то спутник F является θ -значным.

Лемма 10 [Скиба, 1997, с. 158]. Решетка l_n^τ является полной подрешеткой решетки l_n .

3. Основной результат

Для доказательства теоремы установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 11. Для любого простого числа p и для любой формации $H \in l_{\omega_\infty}^\tau$ имеет место $N_p H \in l_{\omega_\infty}^\tau$.

Доказательство. Пусть $M = N_p H$. Поскольку формация H – τ -замкнутая, то по лемме 5 формация M также является τ -замкнутой формацией. Докажем, что M тотально ω -насыщена.

Пусть вначале $p \in \omega$. Формация N_p имеет такой внутренний ω -локальный спутник m , что $m(p) = (1)$, $m(\omega') = (1)$ и $m(q) = \emptyset$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ (см. доказательство леммы 11 [Skiba, Shemetkov, 2000] и леммы 1.5.6 [Воробьев, 2012, с. 58]) Ввиду леммы 2 формация M имеет спутник f , удовлетворяющий условиям: $f(p) = H$, $f(\omega') = M$ и $f(q) = h(q)$ для любого $q \in \omega \setminus \{p\}$. Поскольку $H \in l_{\omega_\infty}^\tau$, то M является n -кратно ω -насыщенной для любого натурального n . Следовательно, M – тотально ω -насыщенная формация.

Пусть теперь $p \notin \omega$. Формация N_p имеет такой пустой ω -локальный спутник m , что $m(q) = \emptyset$ для всех $q \in \omega$ и $m(\omega') = N_p$ [Skiba, Shemetkov, 2000; Воробьев, 2012, с. 17]. Тогда согласно лемме 2, формация M имеет спутник f , такой что $f(q) = h(q)$ для любого $q \in \omega$ и $f(\omega') = M$. Следовательно, M – тотально ω -насыщенная формация. Таким образом, в любом случае $M \in l_{\omega_\infty}^\tau$. Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть F – класс Фиттинга, замкнутый относительно фактор-групп. И пусть $G = G_1 \times \dots \times G_n$, где $n \geq 2$. Тогда $G_F = (G_1)_F \times \dots \times (G_n)_F$.

Доказательство. Индукция по числу сомножителей n прямого произведения. Пусть $n = 2$. Поскольку F – класс Фиттинга, то $(G_1)_F \times (G_2)_F \leq G_F$ и $G_F \cap G_i = (G_i)_F$, $i = 1, 2$. Ввиду того, что $G_1 G_F / G_1 \triangleleft G / G_1 \cong G_2$ и F – класс, замкнутый относительно фактор-групп (гомоморф), имеем $G_1 G_F / G_1 \cong G_F / G_F \cap G_1 = G_F / (G_1)_F \in F$, и группа $G_F / (G_1)_F$ – изоморфна нормальной F -подгруппе группы G_2 . Поэтому $|G_F / (G_1)_F| \leq |(G_2)_F|$ и $G_F = (G_1)_F \times (G_2)_F$ (т. е. F в данном случае является классом Локетта; см. теорема 1.9 [Doerk, Hawkes, 1992, p. 680], а также предложение 1.25 [Doerk, Hawkes, 1992, p. 686]).

Утверждение леммы для произвольного натурального $n \geq 3$ следует, с учетом базы и предположения индукции, из соотношений

$$\begin{aligned} G_F &= (G_1 \times \dots \times G_n)_F = ((G_1 \times \dots \times G_{n-1}) \times G_n)_F = (G_1 \times \dots \times G_{n-1})_F \times (G_n)_F = \\ &= (G_1)_F \times \dots \times (G_{n-1})_F \times (G_n)_F. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть $W = Awr B = [K]B$, где K – база регулярного сплетения W , $A, B \neq 1$. И пусть B_1 – подгруппа группы B , такая что $1 \neq B_1 \triangleleft B$, $m = |B : B_1|$, $I = \{1, \dots, m\}$, $T = \{t_i \mid i \in I\}$ – левая трансверсаль B_1 в B ($B = \bigcup_{i=1}^m t_i B_1$). Тогда

1) если $M_1 = \{f \in K \mid \forall i \in I: \prod_{b_1 \in B_1} f(t_i b_1) \in A'\}$, где $A' = [A, A]$ – коммутант группы A , то $[B_1, K] = M_1$ и $M_1 = \langle X_1 \rangle$, где

$$X_1 = \{f \in K \mid \exists i_0 \in I \exists b_{1,0} \in B_1, b_{1,0} \neq 1: f(t_{i_0}) = f(t_{i_0} b_{1,0})^{-1}; f(y) = 1, y \neq t_{i_0}, t_{i_0} b_{1,0}\}.$$

Кроме того, M_1 является подпрямым произведением в K ;

2) Для нормального замыкания B_1^W подгруппы B_1 в W имеет место $B_1^W = B_1 \cdot M_1$;

3) Пусть, кроме того, $N \triangleleft W$ и $B_1 = N \cap B \neq 1$. Тогда $N \cap K$ – подпрямое произведение в K .

Доказательство. 1. Здесь и далее для заданных групп A и B через $A^{(B)}$ будем обозначать прямое произведение изоморфных копий группы A , индексированных элементами группы B . Тогда $A^{(B)} = \{f \mid f : B \rightarrow A\}$ – группа всех функций $f : B \rightarrow A$ с покомпонентным умножением. Для произвольного $b \in B$ через A_b будем обозначать b -ую копию пассивной группы A , т. е. $A_b = \{f \in K \mid f(y) = 1, y \neq b\}$. Таким образом, $K = A^{(B)} = \prod_{b \in B} A_b$. Напомним, что для $f \in A^{(B)}$, $b \in B$, функцию f^b определяют, полагая $f^b(y) = f(yb^{-1})$ для всех $y \in B$ [Doerk, Hawkes, 1992; Neumann et al., 1962; Neumann, 1964]. Согласно лемме 8.1 [Neumann, 1964] (см. также лемма 18.8 (a) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67]), $K \cdot B_1 \cong A^{(T)} wr B_1$, где изоморфизм $\psi : K \cdot B_1 \rightarrow A^{(T)} wr B_1$ задается в виде $\psi : f \cdot b_1 \mapsto \tilde{f} \cdot b_1$, причем $f \in K = A^{(B)}$, $b_1 \in B_1$, $\tilde{f} \in (A^{(T)})^{(B_1)}$. Функция \tilde{f} определяется следующим образом (см. теорема 5.4 [Neumann et al., 1962]): $\tilde{f}(y) = \varphi \in A^{(T)}$, где $\varphi : T \rightarrow A$ – зависит от $y \in B_1$ и удовлетворяет равенству $\varphi(t_i) = f(t_i y)$ для любого $i \in I$. Отсюда $f(t_i y) = \tilde{f}(y)(t_i)$. Для $\tilde{f} \in (A^{(T)})^{(B_1)}$, $b_1 \in B_1$ функцию \tilde{f}^{b_1} определяют, полагая $\tilde{f}^{b_1}(y) = \tilde{f}(yb_1^{-1})$. При этом $\psi(f^{b_1}) = \tilde{f}^{b_1}$.

Обозначим через \tilde{K} базу регулярного сплетения $A^{(T)} wr B_1$. Тогда, как несложно видеть, $\psi(K) = (A^{(T)})^{(B_1)} = \tilde{K}$. Для образа взаимного коммутанта $[B_1, K]$ при изоморфизме ψ имеют место соотношения $\psi([B_1, K]) = [\psi(B_1), \psi(K)] = [B_1, \psi(K)] = [B_1, \tilde{K}]$.

Поскольку $B_1 \neq 1$, то ввиду теоремы 4.1 [Neumann, 1964] (см. лемма 18.3 (a), (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 63] и предложение 18.4 (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 65]) имеет место равенство $[B_1, \tilde{K}] = \tilde{M}_1$, где $\tilde{M}_1 = \{\tilde{f} \in \tilde{K} \mid \prod_{b_1 \in B_1} \tilde{f}(b_1) \in (A^{(T)})'\}$. Учитывая, что по

свойствам коммутанта $(A^{(T)})' = (\prod_{i \in I} A_{t_i})' = \prod_{i \in I} A'_{t_i} = A'^{(T)}$, а также равенство $f(t_i b_1) = \tilde{f}(b_1)(t_i)$, справедливое для любых $b_1 \in B_1$, $i \in I$, видим, что условие



$\prod_{b_1 \in B_1} \tilde{f}(b_1) \in (A^{(T)})' = A'^{(T)}$, интерпретируемое в W , или, иначе, относящееся к

соответствующему при изоморфизме ψ^{-1} множеству M_1 , равносильно условию

$$\forall i \in I: (\prod_{b_1 \in B_1} \tilde{f}(b_1))(t_i) = \prod_{b_1 \in B_1} \tilde{f}(b_1)(t_i) = \prod_{b_1 \in B_1} f(t_i b_1) \in A'_{t_i} \cong A'.$$

Значит, $\psi^{-1}(\tilde{M}_1) = M_1$. Применяя к обеим частям равенства $[B_1, \tilde{K}] = \tilde{M}_1$ изоморфизм ψ^{-1} и учитывая равенство $\psi([B_1, K]) = [B_1, \tilde{K}]$, получаем $[B_1, K] = M_1$.

Далее, из той же теоремы следует, что $\tilde{M}_1 = \langle \tilde{X}_1 \rangle$, где

$$\tilde{X}_1 = \{ \tilde{f} \in \tilde{K} \mid \exists b_{1,0} \in B_1, b_{1,0} \neq 1: \tilde{f}(1) = \tilde{f}(b_{1,0})^{-1}; \tilde{f}(y) = 1, y \neq 1, b_{1,0} \}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, находим, что $\psi^{-1}(\tilde{X}_1) = \hat{X}_1$, где

$$\hat{X}_1 = \{ f \in K \mid \exists b_{1,0} \in B_1, b_{1,0} \neq 1 \forall i \in I: f(t_i) = f(t_i b_{1,0})^{-1}; f(y) = 1, y \neq t_i, t_i b_{1,0} \}.$$

Тогда из $\tilde{M}_1 = \langle \tilde{X}_1 \rangle$ ввиду $\psi^{-1}(\tilde{M}_1) = M_1$ следует $M_1 = \langle \hat{X}_1 \rangle$.

Покажем, что $\langle \hat{X}_1 \rangle = \langle X_1 \rangle$, где X_1 – множество из условия теоремы. Заметим, что если $m = |B: B_1| = 1$, то $B_1 = B$. Тогда $\hat{X}_1 = X_1$, откуда $\langle \hat{X}_1 \rangle = \langle X_1 \rangle$. Поэтому считаем, что $m \neq 1$. Из очевидного включения $X_1 \subseteq \hat{X}_1$ следует $\langle X_1 \rangle \subseteq \langle \hat{X}_1 \rangle$. Пусть $f \in \hat{X}_1$. Если $f = 1$ – единичная функция (т. е. $f(y) = 1$ для любого $y \in B$), то очевидно, что $f \in X_1$. Пусть $f \neq 1$. И пусть $I_0 = \{i \in I \mid t_i \in \text{supp}(f) \cap T\}$, где $\text{supp}(f) = \{b \in B \mid f(b) \neq 1\}$ – носитель функции f . Тогда $I_0 \neq \emptyset$ и из определения \hat{X}_1 следует существование такого $\hat{b}_1 \in B_1$, $\hat{b}_1 \neq 1$, что для любого $i \in I_0$ имеет место $f(t_i) = f(t_i \hat{b}_1)^{-1} \neq 1$. Для каждого $i \in I_0$ определим такую функцию $\varphi_i \in X_1$, что $\varphi_i(t_i) = \varphi_i(t_i \hat{b}_1)^{-1} = f(t_i)$; $\varphi_i(y) = 1$, если $y \neq t_i, t_i \hat{b}_1$. Тогда $f = \prod_{i \in I_0} \varphi_i$, причем произведение не зависит от порядка следования

сомножителей, поскольку для любых $k, l \in I_0$, $k \neq l$ ввиду $\text{supp}(\varphi_k) \cap \text{supp}(\varphi_l) = \emptyset$ функции φ_k и φ_l коммутируют. Значит, $f \in X_1$. Следовательно, $\langle \hat{X}_1 \rangle \subseteq \langle X_1 \rangle$. Таким образом, $M_1 = \langle \hat{X}_1 \rangle = \langle X_1 \rangle$.

Наконец, для произвольного $b_0 \in B$ пусть $\pi_{b_0}: K \rightarrow A_{b_0}$ – проектирование $K = A^{(B)} = \prod_{b \in B} A_b$ на A_{b_0} – b_0 -ую копию пассивной группы. Поскольку T – левая трансверсаль B_1 в B , то b_0 единственным образом представляется в виде $b_0 = t_{i_0} b_{1,0}$, где $t_{i_0} \in T$, $b_{1,0} \in B_1$. Пусть $a \in A$ – произвольный элемент пассивной группы A . Тогда если $b_{1,0} \neq 1$, то для функции $g \in K$ с условием $g(t_{i_0}) = g(t_{i_0} b_{1,0})^{-1} = g(b_0)^{-1} = a^{-1}$; $g(y) = 1$, если $y \neq t_{i_0}, t_{i_0} b_{1,0}$ – имеет место $g \in X_1$. Если $b_{1,0} = 1$, то $b_0 = t_{i_0}$. Поскольку $B_1 \neq 1$, то существует $\bar{b}_1 \in B_1$, $\bar{b}_1 \neq 1$. Рассматривая теперь функцию $h \in K$ с условием $h(t_{i_0}) = h(b_0) = h(t_{i_0} \bar{b}_1)^{-1} = a$; $h(y) = 1$, если $y \neq t_{i_0}, t_{i_0} \bar{b}_1$, – аналогично имеем $h \in X_1$.



Ввиду включения $X_1 \subseteq \langle X_1 \rangle = M_1$ делаем вывод, что $\pi_{b_0}(M_1) = A_{b_0} \cong A$. Следовательно, M_1 – подпрямое произведение в K .

2. Для B_1^W ввиду леммы 7.4 (h) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 23] имеем

$$B_1^W = B_1[B_1, W] = B_1[B_1, K \cdot B] = B_1[B_1, B][B_1, K] = B_1[B_1, K] = B_1M_1$$

(здесь мы использовали также условия $B \in N_W(K)$, $B_1 \triangleleft B$ и установленное в утверждении 1 равенство $[B_1, K] = M_1$).

3. По условию $B_1 = N \cap B \neq 1$, поэтому N – неединичная нормальная подгруппа регулярного сплетения $W = A wr B$. Отсюда из леммы 18.8 (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67; Каргаполов, Мерзляков, 2009, с. 72] следует, что $N \cap K \neq 1$. Из утверждений 1 и 2 получаем, что $N \supseteq B_1^W = B_1 \cdot M_1 \supseteq M_1$. Тогда $N \cap K \supseteq M_1 \cap K = M_1$. Согласно утверждению 1, M_1 – подпрямое произведение в K . Следовательно, $N \cap K$ – также подпрямое произведение в K . Лемма доказана.

Напомним, что абстрактный класс \mathbb{F} называется *радикальным классом*, или *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и для любой группы G имеет место включение $G_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$. При доказательстве следующей леммы символом $\mathbb{M}\mathbb{H}$ обозначается *радикальное произведение классов Фиттинга* \mathbb{M} и \mathbb{H} , т. е. $\mathbb{M}\mathbb{H} = \{G \mid G/G_{\mathbb{M}} \in \mathbb{H}\}$.

Напомним также, что для любых непустых множеств простых чисел π, σ символом $O_{\pi, \sigma}(G)$ обозначается характеристическая подгруппа группы G , определяемая соотношением $O_{\pi, \sigma}(G)/O_{\pi}(G) = O_{\sigma}(G/O_{\pi}(G))$ [Doerk, Hawkes, 1992, p. 28]. Тогда для любого простого числа p имеет место $F_p(G) = O_{p', p}(G)$. Символом $F_{\pi}(G)$ обозначим характеристическую подгруппу группы G , определяемую соотношением

$$F_{\pi}(G) = \bigcap_{p \in \pi} F_p(G) = \bigcap_{p \in \pi} O_{p', p}(G).$$

Лемма 14. Пусть \mathbb{X} – класс Фиттинга, замкнутый относительно фактор-групп. И пусть $W_1 = K \cdot B_1 \leq W = A wr B = K \cdot B$, где $K = A^{(B)} = \{f \mid f : B \rightarrow A\}$ – база регулярного сплетения W , $A, B \neq 1$, B_1 – подгруппа группы B . Тогда

1) Если $A_{\mathbb{X}} \neq A$, то $(W_1)_{\mathbb{X}} = K_{\mathbb{X}} = (A_{\mathbb{X}})^{(B)}$; в частности, если $A_{\mathbb{X}} = 1$, то $(W_1)_{\mathbb{X}} = 1$.

Если $A_{\mathbb{X}} = A$, то $(W_1)_{\mathbb{X}} = K \cdot \bar{B}_1 = A^{(B)} \cdot \bar{B}_1$, где $\bar{B}_1 = \prod_{\substack{N \triangleleft B_1, N \in \mathbb{X}, \\ K \cdot N \in \mathbb{X}}} N$, $\bar{B}_1 \leq (B_1)_{\mathbb{X}}$ и, кроме

того, \bar{B}_1 является наибольшей нормальной \mathbb{X} -подгруппой группы B_1 , удовлетворяющей условию $K \cdot \bar{B}_1 \in \mathbb{X}$; в частности, если $K \cdot (B_1)_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$, то $(W_1)_{\mathbb{X}} = K \cdot (B_1)_{\mathbb{X}} = A^{(B)} \cdot (B_1)_{\mathbb{X}}$;

2) Пусть, кроме того, $A = P$ – неединичная p -группа для некоторого простого числа p , σ и ν – такие непустые множества простых чисел, что $p \in \nu$, $\sigma \subseteq p'$. Тогда

$$O_{\sigma}(W_1) = 1,$$

$$O_{\nu}(W_1) = K \cdot O_{\nu}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu}(B_1),$$

$$O_{\nu, \sigma}(W_1) = K \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1),$$



$$O_{\sigma, \nu}(W_1) = O_{\nu}(W_1) = K \cdot O_{\nu}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu}(B_1).$$

В частности,

$$F_p(W_1) = F_{\nu}(W_1) = F(W_1) = O_p(W_1) = K \cdot O_p(B_1) = P^{(B)} \cdot O_p(B_1).$$

Доказательство. 1. Поскольку $K \triangleleft W$ и X – класс Фиттинга, то $K \triangleleft W_1$ и $K_X = (W_1)_X \cap K$. Ввиду леммы 12

$$K_X = (A^{(B)})_X = \left(\prod_{b \in B}^{\times} A_b \right)_X = \prod_{b \in B}^{\times} (A_b)_X = \prod_{b \in B}^{\times} (A_X)_b = (A_X)^{(B)}.$$

Тогда если $B_1 = 1$, то $W_1 = K = A^{(B)}$ и $(W_1)_X = K_X = (A^{(B)})_X = (A_X)^{(B)}$. Поэтому если $A_X \neq A$, то $(W_1)_X = K_X = (A_X)^{(B)}$. Если $A_X = A$, то $K_X = (A_X)^{(B)} = A^{(B)} = K$, $\bar{B}_1 = B_1 = 1$ и $(W_1)_X = K_X = K \cdot 1 = A^{(B)} \cdot 1$. Значит, для $B_1 = 1$ утверждение 1 справедливо. В дальнейшем считаем, что $B_1 \neq 1$.

Пусть $A_X \neq A$. Если $A_X = 1$, то из соотношений $K_X = (A_X)^{(B)}$ и $K_X = (W_1)_X \cap K$ следует, что $K_X = 1$ и $(W_1)_X \cap K = 1$. Согласно лемме 8.1 [Neumann, 1964] (см. также лемма 18.8 (a) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67]) имеем $W_1 = K \cdot B_1 \cong A^{(T)} \text{ wr } B_1$, где T – левая трансверсаль B_1 в B , ψ – изоморфизм, описанный при доказательстве леммы 13. Обозначим через \tilde{W}_1 регулярное сплетение $A^{(T)} \text{ wr } B$, через \tilde{K} – его базу. Тогда $\psi(W_1) = \tilde{W}_1$, $\psi(K) = (A^{(T)})^{(B_1)} = \tilde{K}$ и, кроме того, $\psi((W_1)_X) = (\tilde{W}_1)_X$. Применяя ψ к обеим частям равенства $(W_1)_X \cap K = 1$, получаем $(\tilde{W}_1)_X \cap \tilde{K} = 1$. Тогда $(\tilde{W}_1)_X = 1$ согласно лемме 18.8 (b) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 67] (см. также упражнение 6.2.2 [Каргаполов, Мерзляков, 2009, с. 72]). Из последнего равенства, ввиду $K_X = 1$, следуют соотношения

$$\psi^{-1}((\tilde{W}_1)_X) = (W_1)_X = 1 = K_X = (A_X)^{(B)}.$$

Значит, утверждение для $A_X = 1$ справедливо.

Пусть теперь $A_X \neq 1$. Тогда из соотношений $K_X = (A_X)^{(B)}$ и $K_X = (W_1)_X \cap K$ получаем, что $K_X \neq 1$ и $(W_1)_X \cap K \neq 1$. Следовательно, $(W_1)_X \neq 1$. Пусть $H_1 = (W_1)_X \cap B_1$. Предположим, что $H_1 \neq 1$. Обозначим через \tilde{H}_1 подгруппу группы \tilde{W}_1 , ψ -изоморфную H_1 . Тогда из последнего равенства имеем

$$\tilde{H}_1 = (\tilde{W}_1)_X \cap \tilde{B}_1 = (\tilde{W}_1)_X \cap B_1 \neq 1.$$

Применяя лемму 13, заключаем, что $(\tilde{W}_1)_X \cap \tilde{K}$ – подпрямое произведение в \tilde{K} . Отсюда ввиду соотношений

$$\psi^{-1}((\tilde{W}_1)_X \cap \tilde{K}) = (W_1)_X \cap K = K_X$$

получаем, что K_X – подпрямое произведение в K .

Для произвольного $b_0 \in B$ пусть $\pi_{b_0} : K \rightarrow A_{b_0}$ – проектирование $K = A^{(B)} = \prod_{b \in B}^{\times} A_b$

на A_{b_0} – b_0 -ую копию пассивной группы. Тогда ввиду $K_X = (A_X)^{(B)}$ имеем

$$\pi_{b_0}(K_X) = \pi_{b_0}((A_X)^{(B)}) = (A_X)_{b_0} \cong A_X \neq A.$$

Получили противоречие. Значит, исходное предположение неверно, и $H_1 = (W_1)_X \cap B_1 = 1$. Тогда из соотношений $W_1 = K \cdot B_1$, $K \cap B_1 = 1$ следует, что $(W_1)_X \leq K$. Учитывая, что $K_X = (W_1)_X \cap K$, окончательно получаем

$$(W_1)_X = K_X = (A_X)^{(B)}.$$

Замечание 1. Несложно видеть, что если X – класс Локетта (см. теорема 1.9 [Doerk, Hawkes, 1992, p. 680]), то рассуждения, проведенные при доказательстве данной части утверждения, останутся в силе. Тогда также получаем доказательство утверждения 2.1 (а) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 697].

Пусть теперь $A_X = A$. Ввиду установленного выше равенства $K_X = (A_X)^{(B)}$ имеем

$$K_X = (A_X)^{(B)} = A^{(B)} = K,$$

(т. е. K является X -группой). Поэтому $K \leq (W_1)_X$. Тогда имеют место равенства

$$(W_1)_X = (W_1)_X \cap W_1 = (W_1)_X \cap K \cdot B_1 = K \cdot ((W_1)_X \cap B_1).$$

Поскольку $K \cap ((W_1)_X \cap B_1) \leq K \cap B_1 = 1$ и класс X замкнут относительно фактор-групп, то $K \cap ((W_1)_X \cap B_1) = 1$ и $(W_1)_X / K \cong (W_1)_X \cap B_1 \in X$. Следовательно, так как $(W_1)_X \triangleleft W_1$, то $(W_1)_X \cap B_1$ – нормальная X -подгруппа группы B_1 .

Пусть $X_{B_1} = \{N \triangleleft B_1 \mid N \in X, K \cdot N \in X\}$ и \bar{B}_1 – группа из условия теоремы. Ввиду того, что K – X -группа, множество $X_{B_1} \neq \emptyset$, так как оно содержит единичную подгруппу. Очевидно, что $\forall N \in X_{B_1} : N \leq (B_1)_X$. Заметим также, что $\forall N \in X_{B_1} : K \cdot N \triangleleft W_1$, так как $N \triangleleft B_1$ и $K \triangleleft W_1$. Далее, X_{B_1} – частично упорядочено по включению и имеет единственный максимальный элемент $\hat{B}_1 = \langle N \mid N \in X_{B_1} \rangle$. Действительно, так как $\forall N \in X_{B_1} : N \triangleleft B_1$, $N \in X$ и X -класс Фиттинга, то \hat{B}_1 совпадает с произведением всех $N \in X_{B_1}$ и является нормальной X -подгруппой B_1 . Следовательно,

$$\hat{B}_1 = \prod_{N \in X_{B_1}} N = \bar{B}_1,$$

а также $\hat{B}_1 \leq (B_1)_X$. Аналогично из условий $\forall N \in X_{B_1} : K \cdot N \triangleleft W_1$, $K \cdot N \in X$, учитывая также, что X -класс Фиттинга, получаем, что подгруппа

$$\prod_{N \in X_{B_1}} K \cdot N = K \cdot \prod_{N \in X_{B_1}} N = K \cdot \hat{B}_1$$

является нормальной X -подгруппой группы W_1 . Это означает, что $\bar{B}_1 = \hat{B}_1 \in X_{B_1}$. Поэтому \bar{B}_1 – наибольшая нормальная X -подгруппа группы B_1 , удовлетворяющая условию $K \cdot \bar{B}_1 \in X$.

Наконец, поскольку $(W_1)_X \cap B_1$ – нормальная X -подгруппа группы B_1 и $(W_1)_X = K \cdot ((W_1)_X \cap B_1) \in X$, то $(W_1)_X \cap B_1 \leq \bar{B}_1$. Следовательно, $(W_1)_X \leq K \cdot \bar{B}_1$. С другой стороны, $K \cdot \bar{B}_1$ – нормальная X -подгруппа группы W_1 . Поэтому $K \cdot \bar{B}_1 \leq (W_1)_X$. Следовательно,



$$(W_1)_X = K \cdot \bar{B}_1 = A^{(B)} \cdot \bar{B}_1.$$

В частности, если $K \cdot (B_1)_X \in X$, то $\bar{B}_1 = (B_1)_X$ и $(W_1)_X = K \cdot (B_1)_X = A^{(B)} \cdot (B_1)_X$.

Замечание 2. Как следует из доказательства утверждения, если для класса X дополнительно выполняется требование $\text{Ext}_X X \subseteq X$, где $\text{Ext}_X X$ – расширение X – группы посредством группы из X (совпадающее в данном случае с XX – радикальным произведением X с X), то для случая $A_X = A$ имеет место включение $K \cdot (B_1)_X \in \text{Ext}_X X \subseteq X$. Следовательно, $(W_1)_X = K \cdot (B_1)_X = A^{(B)} \cdot (B_1)_X$.

2. Пусть $A = P$ – неединичная p -группа для некоторого простого числа p , подмножества σ, ν – из условия теоремы. Для любого непустого множества $\pi \subseteq P$ G_π – радикальная формация, причем $\text{Ext}_{G_\pi} G_\pi = G_\pi G_\pi \subseteq G_\pi$ (радикальное и корадикальное произведения в данном случае совпадают). Полагая последовательно π равным σ, ν и учитывая, что $O_\sigma(A) = 1$ и $O_\nu(A) = A$, из утверждения 1 получаем

$$O_\sigma(W_1) = 1,$$

$$O_\nu(W_1) = K \cdot O_\nu(B_1) = P^{(B)} \cdot O_\nu(B_1).$$

Покажем, что $O_{\nu, \sigma}(W_1) = K \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1)$. Так как $O_\nu(A) = A$, то $O_{\nu, \sigma}(A) = A$. Пусть $\widehat{W}_1 = K \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1)$. Поскольку $\text{Ext}_{G_\nu} G_\sigma = G_\nu G_\sigma$ – радикальная формация (радикальное и корадикальное произведения в данном случае также совпадают), то ввиду утверждения 1 для доказательства тождества достаточно проверить выполнение условия $\widehat{W}_1 \in G_\nu G_\sigma$. Поскольку $O_{\nu, \sigma}(B_1) \leq B_1$ и $K \cap B_1 = 1$, то $K \cap O_{\nu, \sigma}(B_1) = 1$. Кроме того, из условий $O_\nu(B_1) \triangleleft O_{\nu, \sigma}(B_1)$ и $K \triangleleft W_1$ следует, что

$$O_\nu(W_1) = K \cdot O_\nu(B_1) \triangleleft K \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1) = \widehat{W}_1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \widehat{W}_1 / O_\nu(W_1) &= K \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1) / K \cdot O_\nu(B_1) \cong O_{\nu, \sigma}(B_1) / O_\nu(B_1) \cdot (K \cap O_{\nu, \sigma}(B_1)) = \\ &= O_{\nu, \sigma}(B_1) / O_\nu(B_1) = O_\sigma(B_1 / O_\nu(B_1)) \in G_\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, $\widehat{W}_1 \in \text{Ext}_{G_\nu} G_\sigma = G_\nu G_\sigma$. Значит, ввиду утверждения 1 имеем

$$O_{\nu, \sigma}(W_1) = K \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1) = P^{(B)} \cdot O_{\nu, \sigma}(B_1).$$

Наконец, из равенства $O_\sigma(W_1) = 1$ следует, что

$$O_{\sigma, \nu}(W_1) = O_\nu(W_1) = K \cdot O_\nu(B_1) = P^{(B)} \cdot O_\nu(B_1).$$

В частности,

$$F_p(W_1) = O_{p', p}(W_1) = O_p(W_1) = K \cdot O_p(B_1) = P^{(B)} \cdot O_p(B_1).$$

Учитывая последние соотношения, а также включения

$$O_p(W_1) \leq \prod_{q \in \pi(W_1)}^\times O_q(W_1) = F(W_1) = \bigcap_{q \in P} F_q(W_1) \leq \bigcap_{q \in \nu} F_q(W_1) = F_\nu(W_1) \leq F_p(W_1),$$

справедливые для любого множества ν из условия теоремы (см. теорема 13.4 (g) [Doerk, Hawkes, 1992, p. 44]), имеем

$$F_p(W_1) = F_\nu(W_1) = F(W_1) = O_p(W_1) = K \cdot O_p(B_1) = P^{(B)} \cdot O_p(B_1).$$

Лемма доказана.



Лемма 15. Пусть $F = LF_{\omega}(f)$, где f – ω -локальный $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -значный спутник формации F . Тогда F является τ -замкнутой тотально ω -насыщенной формацией.

Доказательство. Поскольку спутник f является $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -значным, то по определению формация F – тотально ω -насыщена. Покажем, что формация F – τ -замкнута. Пусть $H \in \tau(G)$, где $G \in F$. И пусть $p \in \pi(H) \cap \omega$, $F_p = F_p(G)$. Тогда, поскольку для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ формация $f(a)$ – τ -замкнута, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} H/F_p \cap H &\cong HF_p/F_p \in \tau(G/F_p) \subseteq f(p), \\ H/G_{\omega d} \cap H &\cong HG_{\omega d}/G_{\omega d} \in \tau(G/G_{\omega d}) \subseteq f(\omega'). \end{aligned}$$

Так как

$$F_p \cap H \subseteq F_p(H) \text{ и } G_{\omega d} \cap H \subseteq H_{\omega d},$$

то для любого $p \in \pi(H) \cap \omega$ имеет место $H/F_p(H) \in f(p)$ и, кроме того, $H/H_{\omega d} \in f(\omega')$. Следовательно, $H \in F$. Итак, формация F τ -замкнута. Значит, F – τ -замкнутая тотально ω -насыщенная формация. Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть $F = LF_{\omega}(F)$ – τ -замкнутая тотально ω -насыщенная формация. Тогда канонический спутник F является $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -значным.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $F(\omega') = F \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$. Ясно также, что если $p \in \omega \setminus \pi(F)$, то $F(p) = \emptyset \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$. Покажем, что для любого $p \in \pi(F) \cap \omega$ имеет место $F(p) \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$. Поскольку $F \in l_{\omega_{\infty}}$, то $F = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются n -кратно ω -насыщенными формациями для любого натурального n . Следовательно, $f(a) \in l_{\omega_{\infty}}$ для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Поэтому $F \in (l_{\omega_{\infty}})^{\omega}$. Тогда, учитывая очевидное включение $(l_{\omega_{\infty}})^{\omega} \subseteq l_{\omega_{\infty}}$ и лемму 11, из леммы 9 получаем, что $F(p) \in l_{\omega_{\infty}}$.

Покажем, что формация $F(p)$ τ -замкнута. Пусть $G \in F(p)$ и $H \in \tau(G)$. Индукцией по $|G|$ покажем, что $H \in F(p)$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа в G . Тогда $HR/R \in \tau(G/R)$. Так как по предположению индукции $G/R \in F(p)$, то

$$H/R \cap H \cong HR/R \in F(p).$$

Поэтому, если $O_p(G) \neq 1$, то $H \in N_p F(p) = F(p)$. Кроме того, если в G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы R и N , то

$$H \cong H/1 = H/R \cap N \cap H \in F(p)$$

как подпрямое произведение групп, изоморфных $H/R \cap H$ и $H/N \cap H$.

Пусть $O_p(G) = 1$ и R – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Пусть P – неединичная p -группа и $R = PwrG = [K]G$, где K – база регулярного сплетения R . Поскольку $O_p(G) = 1$, то из леммы 14 следует, что $F_p(R) = O_p(R) = K$. Учитывая, что $R/O_p(R) \cong G \in F(p)$, из леммы 3 получаем, что $R \in F$. Пусть $\varphi: R \rightarrow R/K$ – канонический эпиморфизм группы R на R/K . Тогда $HK/K = H^{\varphi}$, и поэтому $HK/K \in \tau(R/K)$. Поскольку $R/K \cong G$ и $(HK/K)^{\varphi^{-1}} = HK$, то $HK \in \tau(R)$. Ввиду



того, что F – τ -замкнутая формация и $R \in F$, имеем $HK \in F$. Пусть $R_1 = HK$. Тогда $R_1/F_p(R_1) \in F(p)$. Далее, из леммы 14 следует, что

$$F_p(R_1) = O_p(R_1) = KO_p(H).$$

Значит,

$$R_1/F_p(R_1) = KH/KO_p(H) \cong H/O_p(H)(H \cap K) = H/O_p(H) \in F(p).$$

Следовательно, $H \in N_p F(p) = F(p)$. Поэтому формация $F(p)$ τ -замкнута для любого $p \in \pi(F) \cap \omega$.

Таким образом, формация $F(a)$ – τ -замкнута для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следовательно, спутник F – $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значен. Лемма доказана.

Лемма 17. *Справедливо равенство $(l_{\omega_\infty}^\tau)^\omega = l_{\omega_\infty}^\tau$.*

Доказательство. Пусть $F \in (l_{\omega_\infty}^\tau)^\omega$. Тогда по определению $F = LF_\omega(f)$, где f – ω -локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации F . Ввиду леммы 15 $F \in l_{\omega_\infty}^\tau$. Следовательно, $(l_{\omega_\infty}^\tau)^\omega \subseteq l_{\omega_\infty}^\tau$. Докажем обратное включение. Пусть $F \in l_{\omega_\infty}^\tau$ и $F = LF_\omega(F)$. Из леммы 16 следует, что $F(a) \in l_{\omega_\infty}^\tau$ для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Следовательно, $F \in (l_{\omega_\infty}^\tau)^\omega$. Значит, $l_{\omega_\infty}^\tau \subseteq (l_{\omega_\infty}^\tau)^\omega$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 17 из леммы 1 вытекает следующий результат.

Лемма 18. *Пусть $F = l_{\omega_\infty}^\tau \text{ form}(X)$, где X – непустой класс групп. Тогда если f – минимальный ω -локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации F , то справедливы следующие утверждения:*

$$1) f(\omega') = l_{\omega_\infty}^\tau \text{ form}(G/G_{\omega d} \mid G \in X);$$

$$2) f(p) = l_{\omega_\infty}^\tau \text{ form}(X(F_p)) \text{ для всех } p \in \omega;$$

3) *если h – произвольный ω -локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значный спутник формации F и p – некоторое фиксированное число из ω , то $F = LF_\omega(f_1)$, где $f_1(a) = h(a)$ для всех $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$,*

$$f_1(p) = l_{\omega_\infty}^\tau \text{ form}(G \mid G \in h(p) \cap F, O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$.

Лемма 19. *Пусть θ – полная решетка формаций и f_i – минимальный ω -локальный θ -значный спутник формации $F_i \in \theta^\omega$, где $i \in I$. Тогда $\vee_\theta(f_i \mid i \in I)$ – минимальный ω -локальный θ -значный спутник формации $F = \vee_{\theta^\omega}(F_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\pi = \pi(\bigcup_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} \pi(F_i) = \pi(F)$, $f = \vee_\theta(f_i \mid i \in I)$ и h – минимальный ω -локальный θ -значный спутник формации F . Тогда, если $p \in \omega \setminus \pi$, то для любого $i \in I$ имеет место $f_i(p) = \emptyset$. Значит, $f(p) = \emptyset$. Понятно также, что $h(p) = \emptyset$.

Пусть теперь $p \in \pi \cap \omega$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $f_i(p) \neq \emptyset$. Тогда, согласно лемме 1, имеют место равенства:



$$\begin{aligned} h(p) &= \theta \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in \cup_{i \in I} F_i) = \theta \text{form}(\cup_{i \in I} \theta \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in F_i)) = \\ &= \theta \text{form}(\cup_{i \in I} f_i(p)) = (\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I))(p) = f(p). \end{aligned}$$

Кроме того, из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} h(\omega') &= \theta \text{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \cup_{i \in I} F_i) = \theta \text{form}(\cup_{i \in I} \theta \text{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in F_i)) = \\ &= \theta \text{form}(\cup_{i \in I} f_i(\omega')) = (\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I))(\omega') = f(\omega'). \end{aligned}$$

Таким образом, $h = f$. Лемма доказана.

Полагая в лемме 19 $\theta = l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ и учитывая, что $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ – полная решетка формаций (см. теорема 1.5.4 [Воробьев, 2012, с. 54]), получаем следующую лемму.

Лемма 20. Пусть f_i – минимальный ω -локальный $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -значный спутник τ -замкнутой тотально ω -насыщенной формации F_i , где $i \in I$. Тогда $\vee_{\omega_{\infty}}^{\tau}(f_i \mid i \in I)$ – минимальный ω -локальный $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -значный спутник формации $F = \vee_{\omega_{\infty}}^{\tau}(F_i \mid i \in I)$.

Следующая лемма является обобщением леммы 12 [Skiba, Shemetkov, 2000] и соответствующего утверждения теоремы [Воробьев, 2000] (см. также теорема 3.4.1 [Воробьев, 2012, с. 122]).

Лемма 21. Пусть θ – такая полная решетка формаций, что $\theta^{\omega} \subseteq \theta$, и для любой формации $H \in \theta$ формация $N_p H$ принадлежит θ для всех $p \in \omega$. Тогда для любого набора $\{F_i \mid i \in I\}$ формаций $F_i \in \theta^{\omega}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних ω -локальных θ -значных спутников, где $F_i = LF_{\omega}(f_i)$, имеет место равенство

$$\vee_{\theta^{\omega}}(F_i \mid i \in I) = LF_{\omega}(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)).$$

Доказательство. Пусть $F = \vee_{\theta^{\omega}}(F_i \mid i \in I)$ и h_i – минимальный ω -локальный θ -значный спутник формации $F_i = LF_{\omega}(F_i)$, $i \in I$. И пусть $F = LF_{\omega}(F)$, h – минимальный ω -локальный θ -значный спутник формации F , и кроме того, $p \in \omega$. Тогда по лемме 19 $h = \vee_{\theta}(h_i \mid i \in I)$. Ввиду замечания 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] (см. также замечание 1.2.17 [Воробьев, 2012, с. 23]) и леммы 9 имеют место соотношения $h_i(p) \subseteq f_i(p) \subseteq N_p h_i(p) = F_i(p) \in \theta$. Ввиду того, что

$$N_p h_i(p) \subseteq N_p(\vee_{\theta}(h_i(p) \mid i \in I)) \text{ и } N_p(\vee_{\theta}(h_i(p) \mid i \in I)) \in \theta,$$

имеем

$$\theta \text{form}(\cup_{i \in I} N_p h_i(p)) \subseteq \theta \text{form}(N_p(\vee_{\theta}(h_i(p) \mid i \in I))) = N_p(\vee_{\theta}(h_i(p) \mid i \in I)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h(p) &= \theta \text{form}(\cup_{i \in I} h_i(p)) \subseteq \theta \text{form}(\cup_{i \in I} f_i(p)) = f(p) \subseteq \theta \text{form}(\cup_{i \in I} N_p h_i(p)) \subseteq \\ &\subseteq N_p(\vee_{\theta}(h_i(p) \mid i \in I)) = N_p h(p) = F(p). \end{aligned}$$

Итак, $h(p) \subseteq f(p) \subseteq F(p)$ для всех $p \in \omega$.

Кроме того, поскольку $h_i(\omega') \subseteq f_i(\omega') \subseteq F_i(\omega') = F_i \in \theta^{\omega}$ и $\theta^{\omega} \subseteq \theta$, справедливы включения

$$h(\omega') = \theta \text{form}(\cup_{i \in I} h_i(\omega')) \subseteq \theta \text{form}(\cup_{i \in I} f_i(\omega')) = f(\omega') \subseteq \theta \text{form}(\cup_{i \in I} F_i(\omega')) =$$



$$= \theta \operatorname{form}(\cup_{i \in I} F_i) \subseteq \theta^\omega \operatorname{form}(\cup_{i \in I} F_i) = F = F(\omega').$$

Значит, $h(\omega') \subseteq f(\omega') \subseteq F(\omega')$. Таким образом, $h \leq f \leq F$, и поэтому $F = \operatorname{LF}_\omega(f)$. Лемма доказана.

Учитывая леммы 11 и 17, из леммы 21 получаем следующий результат.

Лемма 22. Для любого набора $\{F_i \mid i \in I\}$ τ -замкнутых тотально ω -насыщенных формаций F_i и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних ω -локальных $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значных спутников f_i , где $F_i = \operatorname{LF}_\omega(f_i)$, имеет место равенство

$$\vee_{\omega_\infty}^\tau (F_i \mid i \in I) = \operatorname{LF}_\omega(\vee_{\omega_\infty}^\tau (f_i \mid i \in I)).$$

Лемма 23. Пусть M_i – τ -замкнутая тотально ω -насыщенная формация, $i \in I$, $L = \vee_{\omega_\infty} (M_i \mid i \in I)$, $H = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i \mid i \in I)$, A – такая группа, что любая ее минимальная нормальная подгруппа является либо неабелевой группой, либо абелевой ω' -группой. Тогда если $A \in H$, то $A \in L$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда группа A является монолитической. Пусть $P = \operatorname{Soc}(A)$. Тогда $A \in \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i \mid i \in I) = l_{\omega_\infty}^\tau \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i)$. Пусть

$\pi = \pi(\cup_{i \in I} M_i) \cap \omega$. В силу леммы 7 имеем $S_{\pi\tau} \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i) \in l_{\omega_\infty}^\tau$. Следовательно,

$$H = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i \mid i \in I) = l_{\omega_\infty}^\tau \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i) \subseteq S_{\pi\tau} \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i).$$

Поэтому $A \in S_{\pi\tau} \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i)$. Поскольку по условию P является неабелевой группой или абелевой ω' -группой, то $A \in \tau \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i)$. По лемме 10 в силу τ -замкнутости формации M_i , $i \in I$, имеем $\tau \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i) = \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i)$. Значит,

$$A \in \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i) \subseteq l_{\omega_\infty} \operatorname{form}(\cup_{i \in I} M_i) = L.$$

Пусть теперь группа A не является монолитической, и $\operatorname{Soc}(A) = N_1 \times \dots \times N_k$ ($k \geq 2$), где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы A . Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы A , содержащую $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_k$ и не содержащую N_i . Ввиду леммы 4 $B_i = A/M_i$ – монолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой $N_i M_i / M_i$, A -изоморфной N_i . Поскольку $B_i \in H$, то по доказанному $B_i \in L$. Но тогда, ввиду леммы 4, и группа $A \in L$ как подпрямое произведение групп, изоморфных B_1, \dots, B_k . Лемма доказана.

Лемма 24. Пусть M_i – τ -замкнутая тотально ω -насыщенная формация, $i \in I$ и π – такое непустое множество простых чисел, что $\pi \subseteq \omega$. Тогда

$$\vee_{\omega_\infty}^\tau (N_\pi M_i \mid i \in I) = N_\pi (\vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i \mid i \in I)).$$

Доказательство. Положим $X_1 = \vee_{\omega_\infty}^\tau (N_\pi M_i \mid i \in I)$, $X_2 = N_\pi (\vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i \mid i \in I))$.

Поскольку $M_i \in \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i \mid i \in I)$ для любого $i \in I$, то

$$\bigcup_{i \in I} N_{\pi} M_i \subseteq N_{\pi} (\bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i | i \in I)) = X_2.$$

Ввиду леммы 11 $X_2 \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$. Значит,

$$X_1 = \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (N_{\pi} M_i | i \in I) \subseteq N_{\pi} (\bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i | i \in I)) = X_2.$$

Допустим, что $X_2 \setminus X_1 \neq \emptyset$, и пусть A – группа минимального порядка из $X_2 \setminus X_1$. Тогда A – монолитическая группа и $P = \text{Soc}(A) = A^{X_1}$.

Если P – неабелева группа или абелева π' -группа, то $A \in \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i | i \in I) \subseteq X_1$. Противоречие. Значит, P – абелева p -группа для некоторого простого числа $p \in \pi$. Так как X_1 – ω -насыщенная формация и $p \in \omega$, то $P \not\subseteq \Phi(A)$. Поэтому $P = C_A(P) = F_p(A) = F(A) = O_p(A)$. Согласно лемме 18, формация N_{π} имеет такой внутренний ω -локальный спутник n , что $n(q) = (1)$ для любого $q \in \pi$. Тогда, по лемме 2, формации $N_{\pi} M_i$ и X_2 имеют такие ω -локальные спутники m_i и x_2 , что $m_i(q) = M_i$ и $x_2(q) = \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i | i \in I)$ для любого $q \in \pi, i \in I$. Тогда, ввиду леммы 22, формация X_1 имеет такой внутренний ω -локальный спутник x_1 , что $x_1(q) = \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i | i \in I)$ для любого $q \in \pi$. Следовательно, $x_1(q) = x_2(q)$ для всякого $q \in \pi$. В частности, поскольку $p \in \pi$, то $x_1(p) = x_2(p)$. Так как $A \in X_2$, то $A/O_p(A) = A/F_p(A) \in x_2(p) = x_1(p)$. Тогда, ввиду леммы 3, $A \in X_1$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Пусть $L \in l_{\omega_{\infty}}$, $H \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ и $M_i \in l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ для любого $i \in I$. Тогда для любой подходящей для L и H ω -последовательности простых чисел p_1, p_2, \dots, p_n через $L, H, Lp_1, Hp_1, \dots, Lp_1 \dots p_n, Hp_1 \dots p_n$ обозначим такие $l_{\omega_{\infty}}$ -значные и $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -значные ω -локальные спутники, что

$$\begin{aligned} L(a) &= \bigvee_{\omega_{\infty}} (M_i(a) | i \in I), \quad H(a) = \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i(a) | i \in I), \\ Lp_1(a) &= \bigvee_{\omega_{\infty}} (M_i p_1(a) | i \in I), \quad Hp_1(a) = \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i p_1(a) | i \in I), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$Lp_1 \dots p_n(a) = \bigvee_{\omega_{\infty}} (M_i p_1 \dots p_n(a) | i \in I), \quad Hp_1 \dots p_n(a) = \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i p_1 \dots p_n(a) | i \in I),$$

для всякого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Лемма 25. Пусть M_i – τ -замкнутая тотально ω -насыщенная формация, $i \in I$. Тогда если $L = \bigvee_{\omega_{\infty}} (M_i | i \in I)$, $H = \bigvee_{\omega_{\infty}}^{\tau} (M_i | i \in I)$, то

- 1) $\pi(L) \cap \omega = \pi(H) \cap \omega$;
- 2) для любой подходящей для L и M ω -последовательности простых чисел p_1, \dots, p_n спутники $L, H, Lp_1, Hp_1, \dots, Lp_1 \dots p_n, Hp_1 \dots p_n$ являются каноническими ω -локальными спутниками формаций $L, H, L(p_1), H(p_1), \dots, Lp_1 \dots p_{n-1}(p_n), Hp_1 \dots p_{n-1}(p_n)$ соответственно.

Доказательство. 1. Поскольку включение $L \subseteq H$ очевидно, то $\pi(L) \cap \omega \subseteq \pi(H) \cap \omega$. Пусть $p \in (\pi(H) \cap \omega) \setminus \pi(L)$. По лемме 20 имеем



$$L_{\omega_\infty}(p) = \vee_{\omega_\infty} (M_{i\omega_\infty}(p) | i \in I), \quad \mathfrak{H}_{\omega_\infty}^\tau(p) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_{i\omega_\infty}^\tau(p) | i \in I).$$

Поскольку $p \in \pi(\mathbf{H}) \cap \omega$, то $\mathfrak{H}_{\omega_\infty}^\tau(p) \neq \emptyset$. Поэтому найдется такое $j \in I$, что $\mathfrak{M}_{j\omega_\infty}^\tau(p) \neq \emptyset$. Но тогда, ввиду леммы 18, имеем $p \in \pi(\mathbf{M}_j)$. Следовательно, $p \in \pi(\mathbf{L}) \cap \omega$. Получили противоречие. Значит, $\pi(\mathbf{H}) \cap \omega \subseteq \pi(\mathbf{L}) \cap \omega$. Таким образом, $\pi(\mathbf{L}) \cap \omega = \pi(\mathbf{H}) \cap \omega$.

2. Поскольку M_i – канонический ω -локальный спутник формации \mathbf{M}_i , $i \in I$, то из леммы 22 следует, что спутники $L = \vee_{\omega_\infty} (M_i | i \in I)$ и $H = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i | i \in I)$ являются внутренними ω -локальными спутниками формаций \mathbf{L} и \mathbf{H} соответственно. Ввиду леммы 16 для любого $i \in I$ спутник M_i является $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значным. Применяя лемму 24, получаем, что для любого $p \in \omega$

$$\begin{aligned} L(p) &= \vee_{\omega_\infty} (M_i(p) | i \in I) = \vee_{\omega_\infty} (\mathbf{N}_p M_i(p) | i \in I) = \\ &= \mathbf{N}_p (\vee_{\omega_\infty} (M_i(p) | i \in I)) = \mathbf{N}_p L(p), \\ H(p) &= \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(p) | i \in I) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (\mathbf{N}_p M_i(p) | i \in I) = \\ &= \mathbf{N}_p (\vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(p) | i \in I)) = \mathbf{N}_p H(p), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} L(\omega') &= \vee_{\omega_\infty} (M_i(\omega') | i \in I) = \vee_{\omega_\infty} (\mathbf{M}_i | i \in I) = \mathbf{L}, \\ H(\omega') &= \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(\omega') | i \in I) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (\mathbf{M}_i | i \in I) = \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Таким образом, L и H – канонические ω -локальные спутники соответственно формаций \mathbf{L} и \mathbf{H} .

Пусть теперь p_1, \dots, p_n – некоторая подходящая для \mathbf{L} и \mathbf{H} ω -последовательность простых чисел. По доказанному $L(p_1) = \vee_{\omega_\infty} (M_i(p_1) | i \in I)$, $H(p_1) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(p_1) | i \in I)$, причем формации $M_i(p_1) \in l_{\omega_\infty}^\tau$ для любого $i \in I$. Так как по определению $M_i p_1$ – канонический ω -локальный спутник формации $M_i(p_1)$, $i \in I$, то из леммы 22 следует, что спутники $L p_1 = \vee_{\omega_\infty} (M_i p_1 | i \in I)$ и $H p_1 = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i p_1 | i \in I)$ являются внутренними ω -локальными спутниками формаций $L(p_1)$ и $H(p_1)$ соответственно. Ввиду леммы 16 для любого $i \in I$ спутник $M_i p_1$ является $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значным. Вновь применяя лемму 24, получаем, что для любого $q \in \omega$

$$\begin{aligned} L p_1(q) &= \vee_{\omega_\infty} (M_i p_1(q) | i \in I) = \vee_{\omega_\infty} (\mathbf{N}_q M_i p_1(q) | i \in I) = \\ &= \mathbf{N}_q (\vee_{\omega_\infty} (M_i p_1(q) | i \in I)) = \mathbf{N}_q L p_1(q), \\ H p_1(q) &= \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i p_1(q) | i \in I) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (\mathbf{N}_q M_i p_1(q) | i \in I) = \\ &= \mathbf{N}_q (\vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i p_1(q) | i \in I)) = \mathbf{N}_q H p_1(q), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} L p_1(\omega') &= \vee_{\omega_\infty} (M_i p_1(\omega') | i \in I) = \vee_{\omega_\infty} (M_i(p_1) | i \in I) = L(p_1), \\ H p_1(\omega') &= \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i p_1(\omega') | i \in I) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(p_1) | i \in I) = H(p_1). \end{aligned}$$

Таким образом, Lp_1 и Hp_1 – канонические ω -локальные спутники соответственно формаций $L(p_1)$ и $H(p_1)$.

Далее, предположим, что имеют место тождества

$$Lp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \vee_{\omega_\infty} (M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k) | i \in I),$$

$$Hp_1 \dots p_{k-1}(p_k) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k) | i \in I),$$

и, кроме того, формации $M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k) \in l_{\omega_\infty}^\tau$ для любого $i \in I, 2 \leq k \leq n$. Поскольку по определению $M_i p_1 \dots p_k$ – канонический ω -локальный спутник формации $M_i p_1 \dots p_{k-1}(p_k), i \in I$, то, применяя лемму 22, убеждаемся, что

$$Lp_1 \dots p_k = \vee_{\omega_\infty} (M_i p_1 \dots p_k | i \in I),$$

$$Hp_1 \dots p_k = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i p_1 \dots p_k | i \in I)$$

являются внутренними ω -локальными спутниками формаций $Lp_1 \dots p_{k-1}(p_k)$ и $Hp_1 \dots p_{k-1}(p_k)$ соответственно. Поэтому, в силу лемм 16 и 24, заключаем, что эти спутники канонические. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $M_i - l_{\omega_\infty}^\tau$ -формация, $i \in I$,

$$L = \vee_{\omega_\infty} (M_i | i \in I) = l_{\omega_\infty} \text{form}(\cup_{i \in I} M_i), \quad H = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i | i \in I) = l_{\omega_\infty}^\tau \text{form}(\cup_{i \in I} M_i).$$

Включение $L \subseteq H$ очевидно. Предположим, что $H \setminus L \neq \emptyset$, и пусть A – группа минимального порядка в $H \setminus L$. Тогда A – монолитическая группа, и $P = \text{Soc}(A) = A^L$. Предположим, что $P = \text{Soc}(A)$ – неабелева группа или абелева ω' -группа. Тогда, поскольку $A \in H$, то в силу леммы 23 имеем $A \in L$. Противоречие.

Поэтому P – абелева p -группа для некоторого простого числа $p \in \omega$. Так как L – ω -насыщенная формация, то $P \not\subseteq \Phi(A)$. Следовательно,

$$P = C_A(P) = F_p(A) = F(A) = O_p(A) \text{ и } A = [P]A_1,$$

где A_1 – некоторая максимальная подгруппа из A .

Согласно лемме 25, $\pi(L) \cap \omega = \pi(H) \cap \omega$ и, кроме того, формации L и H имеют такие канонические ω -локальные спутники соответственно L и H , что

$$L(p) = \vee_{\omega_\infty} (M_i(p) | i \in I), \quad H(p) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(p) | i \in I).$$

Поэтому A не является p -группой и $L(p) \neq \emptyset$. Отметим, что ввиду условия $M_i \in l_{\omega_\infty}^\tau$ и леммы 16 $M_i(p) \in l_{\omega_\infty}^\tau$ для любого $i \in I$.

Поскольку $L \subseteq H$, то $L(p) \subseteq H(p)$. Так как $A \notin L$, то $L(p) \subset H(p)$. Действительно, если $L(p) = H(p)$, то $A/O_p(A) = A/F_p(A) \in H(p) = L(p)$ и по лемме 3 имеем $A \in L$, что невозможно. Таким образом, $A_1 \cong A/F_p(A) \in H(p) \setminus L(p)$.

По лемме 25 $\pi(L(p)) \cap \omega = \pi(H(p)) \cap \omega$ и формации $L(p)$ и $H(p)$ имеют такие канонические ω -локальные спутники соответственно Lp и Hp , что

$$Lp(a) = \vee_{\omega_\infty} (M_i p(a) | i \in I), \quad Hp(a) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i p(a) | i \in I)$$

для любого $a \in (\pi(L(p)) \cap \omega) \cup \{\omega'\}$.

Отметим, что из условия $M_i(p) \in l_{\omega_\infty}^\tau$ и леммы 16 следует, что спутник $M_i p$ является $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значным для любого $i \in I$.

Поскольку $A_1 \notin L(p) \neq \emptyset$, то $L(p)$ -корадикал L группы A_1 отличен от единичной подгруппы, и в силу леммы 8 выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

а) $L \not\subset (A_1)_{\omega d}$; б) найдется такое простое число $p_1 \in \pi(L) \cap \omega$, что $A_1/F_{p_1}(A_1) \notin Lp(p_1)$.

Пусть имеет место а). Обозначим через S – \mathbf{S}_ω -радикал группы A_1 , и пусть $B = A_1/S$. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа группы B является неабелевой группой или абелевой ω' -группой. Поскольку $B \in H(p) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(p) | i \in I)$, то ввиду леммы 23 $B \in \vee_{\omega_\infty} (M_i(p) | i \in I) = L(p)$. Поэтому $A_1/S \in L(p)$. Следовательно, $L(p)$ -корадикал L группы A_1 является ω -группой. Полученное противоречие показывает, что случай а) невозможен.

Пусть имеет место условие б). Поскольку $p_1 \in \pi(L) \cap \omega \subseteq \pi(H(p)) \cap \omega$, то $p_1 \in \pi(L(p)) \cap \omega$ и $Lp(p_1) \neq \emptyset$.

Допустим, что $F_{p_1}(A_1) = 1$. Тогда любая минимальная нормальная подгруппа из A_1 является неабелевой $p_1 d$ -группой. Из условия $A_1 \in H(p) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i(p) | i \in I)$ и леммы 23 следует, что $A_1 \in \vee_{\omega_\infty} (M_i(p) | i \in I) = L(p)$. Противоречие. Значит, $F_{p_1}(A_1) \neq 1$.

Заметим также, что $F_{p_1}(A_1) \neq A_1$, поскольку в противном случае $A_1/F_{p_1}(A_1) \cong 1 \in Lp(p_1) \neq \emptyset$, что противоречит выбору p_1 . Таким образом,

$$A_1/F_{p_1}(A_1) \in Hp(p_1) \setminus Lp(p_1),$$

$$Lp(p_1) \neq \emptyset, 1 \neq F_{p_1}(A_1) \subset A_1.$$

Пусть $A_2 = A_1/F_{p_1}(A_1)$. В силу леммы 25 справедливо равенство $\pi(Lp(p_1)) \cap \omega = \pi(Hp(p_1)) \cap \omega$ и, кроме того, формации $Lp(p_1)$ и $Hp(p_1)$ имеют такие канонические ω -локальные спутники Lpp_1 и Hpp_1 соответственно, что

$$Lpp_1(r) = \vee_{\omega_\infty} (M_i pp_1(r) | i \in I), \quad Hpp_1(r) = \vee_{\omega_\infty}^\tau (M_i pp_1(r) | i \in I)$$

для любого $r \in (\pi(Lp(p_1)) \cap \omega) \cup \{\omega'\}$. При этом из условия $M_i p(p_1) \in l_{\omega_\infty}^\tau$, в силу леммы 16, следует, что спутник $M_i pp_1$ является $l_{\omega_\infty}^\tau$ -значным для любого $i \in I$.

Поскольку $A_2 \notin Lp(p_1) \neq \emptyset$, то $Lp(p_1)$ -корадикал K группы A_2 отличен от единичной подгруппы и в силу леммы 8 выполняется по крайней мере одно из следующих условий: а) $K \not\subset (A_2)_{\omega d}$; б) найдется такое простое число $p_2 \in \pi(K) \cap \omega$, что $A_2/F_{p_2}(A_2) \notin Lpp_1(p_2)$.

Пусть имеет место а) и R – \mathbf{S}_ω -радикал группы A_2 . Обозначим через C группу A_2/R . Тогда любая минимальная нормальная подгруппа группы C является неабелевой группой или абелевой ω' -группой. Применяя теперь лемму 23 и рассуждая для группы C так же, как и для группы B , получим, что $Lp(p_1)$ -корадикал K группы A_2 является ω -группой. Последнее противоречит условию а).

Пусть имеет место условие б). Поскольку $p_2 \in \pi(K) \cap \omega \subseteq \pi(Hp(p_1)) \cap \omega$, то $p_2 \in \pi(Lp(p_1)) \cap \omega$ и $Lpp_1(p_2) \neq \emptyset$. Снова используя лемму 23 и проведя для группы A_2 такие же рассуждения, как для группы A_1 , получим, что

$$A_2/F_{p_2}(A_2) \in Hpp_1(p_2) \setminus Lpp_1(p_2),$$

$$Lpp_1(p_2) \neq \emptyset, 1 \neq F_{p_2}(A_2) \subset A_2.$$

Пусть $A_3 = A_2/F_{p_2}(A_2)$. Тогда, по тем же соображениям, группа A_3 будет удовлетворять аналогичным условиям. Поэтому, продолжая этот процесс, мы получим группы

$$A_4 = A_3/F_{p_3}(A_3), \dots, A_n = A_{n-1}/F_{p_{n-1}}(A_{n-1}), \dots$$

При этом для любого натурального $j \geq 2$ выполняются условия (полагаем $p_0 = p$):

$$A_j = A_{j-1}/F_{p_{j-1}}(A_{j-1}) \in Hpp_1 \dots p_{j-2}(p_{j-1}) \setminus Lpp_1 \dots p_{j-2}(p_{j-1}),$$

$$Lpp_1 \dots p_{j-2}(p_{j-1}) \neq \emptyset, 1 \neq F_{p_{j-1}}(A_{j-1}) \subset A_{j-1}.$$

В силу условия $F_{p_{j-1}}(A_{j-1}) \neq 1$ для построенной последовательности групп $A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ имеем $|A_{j-1}| > |A_j|$. Но поскольку группа A конечна, то на некотором шаге m мы получим, что $A_m = 1$. Так как при этом $A_m = A_{m-1}/F_{p_{m-1}}(A_{m-1})$, то $F_{p_{m-1}}(A_{m-1}) = A_{m-1}$. Противоречие.

Таким образом, наше предположение неверно и $H \subseteq L$. Следовательно, $H = L$. Теорема доказана.

Если $\omega = P$ – множество всех простых чисел, из теоремы вытекает

Следствие 1 [Сафонов, Шеметков, 2008]. *Решетка l_∞^τ всех τ -замкнутых тотально насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_∞ всех тотально насыщенных формаций.*

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы следует

Следствие 2. *Решетка $l_{p_\infty}^\tau$ всех τ -замкнутых тотально p -насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l_∞^p всех тотально p -насыщенных формаций.*

Если τ – единичный подгрупповой функтор, то из теоремы получаем

Следствие 3. *Решетка всех наследственных тотально ω -насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех l_∞^ω тотально ω -насыщенных формаций.*

В случае, когда $\tau(G) = S_n\{G\}$ для любой группы G , из теоремы получаем

Следствие 4. *Решетка всех нормально наследственных тотально ω -насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех l_∞^ω тотально ω -насыщенных формаций.*

Заключение

В работе изучены некоторые свойства решетки функторно замкнутых частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Для данной решетки установлено свойство, аналогичное свойству индуктивности полной решетки насыщенных формаций. Даны выражения минимального и канонического ω -локальных спутников точной верхней грани любого подмножества функторно замкнутых частично тотально насыщенных

формаций через минимальные и, соответственно, канонические ω -локальные спутники данного подмножества формаций. Доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка всех τ -замкнутых тотально ω -насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки всех тотально ω -насыщенных формаций. В частности, установлена вложимость решетки всех τ -замкнутых тотально насыщенных формаций в решетку всех тотально насыщенных формаций, а также вложимость решетки всех τ -замкнутых тотально p -насыщенных формаций в решетку всех тотально p -насыщенных формаций.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования и классификации частично тотально насыщенных формаций конечных групп.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция» 1.1.03.02).

Список литературы References

1. Биркгоф Г. 1984. Теория решеток. Пер. с англ. М., Наука, 568. (Birkhoff G. 1973. Lattice Theory. Providence, RI, American Mathematical Society, 418.)
Birkhoff G. 1984. Teoriya reshetok [Lattice Theory]. Moscow, Nauka, 568. (Birkhoff G. 1973. Lattice Theory. Providence, RI, American Mathematical Society, 418.)
2. Воробьев Н.Н. 2000. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга. Доклады НАН Беларуси, 44 (3): 21–24.
Vorob'ev N.N. 2000. Ob induktivnykh reshetkakh formatsiy i klassov Fittinga [On inductive lattices of formations and Fitting classes]. Doklady NAN Belarusi, 44 (3): 21–24. (in Russian)
3. Воробьев Н.Н. 2012. Алгебра классов конечных групп. Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова, 322.
Vorob'ev N.N. 2012. Algebra klassov konechnykh grupp [Algebra of Classes of Finite Groups]. Vitebsk, Vitebsk State University named after P.M. Masherov, 322. (in Russian)
4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. 2009. Основы теории групп. 5-е изд. СПб., Лань, 288.
Kargapolov M.I., Merzliakov Yu.I. 2009. Osnovy teorii grupp. 5-e izd. [Fundamentals of the Theory of Groups. 5 Ed.]. Saint Petersburg, Lan', 288. (in Russian)
5. Сафонов В.Г. 2004. О тотально ω -насыщенных формациях конечных групп. Препринт, № 7. Гомель, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 18.
Safonov V.G. 2004. O total'no ω -nasyshchennykh formatsiyakh konechnykh grupp. Preprint, № 7 [On totally ω -saturated formations of finite groups. Preprint, No. 7]. Gomel, Gomel University Press, 18. (in Russian)
6. Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. 2014. О минимальных тотально ω -насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп. Вестник Витебского государственного университета, 84 (6): 9–15.
Safonov V.G., Safonova I.N. 2014. O minimal'nykh total'no ω -nasyshchennykh nenil'potentnykh formatsiyakh konechnykh grupp [On minimal totally ω -saturated non-nilpotent formations of finite groups]. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta, 84 (6): 9–15. (in Russian)
7. Сафонов В.Г., Шеметков Л.А. 2008. О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп. Доклады НАН Беларуси, 52 (4): 34–37.
Safonov V.G., Shemetkov L.A. 2008. O podreshetkakh reshetki total'no nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups]. Doklady NAN Belarusi, 52 (4): 34–37. (in Russian)
8. Скиба А.Н. 1986. О локальных формациях длины 5. В кн.: Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск, Наука и техника: 149–156.
Skiba A.N. 1986. O lokal'nykh formatsiyakh dliny 5. V kn.: Arifmeticheskoe i podgruppovoe stroenie konechnykh grupp [On local formations of length 5. In: Arithmetic and subgroup structure of finite groups]. Minsk, Nauka i tekhnika: 149–156. (in Russian)
9. Скиба А.Н. 1987. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины. Вопросы алгебры, 3: 21–31.

Skiba A.N. 1987. Kharakterizatsiya konechnykh razreshimyykh grupp zadannoy nil'potentnoy dliny [Characterization of finite soluble groups with given nilpotent length]. *Voprosy algebrы*, 3: 21–31. (in Russian)

10. Скиба А.Н. 1997. Алгебра формаций. Минск, Беларуская навука, 240.

Skiba A.N. 1997. Algebra formatsiy [Algebra of Formations]. Minsk, Belaruskaya navuka, 240. (in Russian)

11. Шеметков Л.А. 1978. Формации конечных групп. М., Наука, 267.

Shemetkov L.A. 1978. Formatsii konechnykh grupp [Formations of Finite Groups]. Moscow, Nauka, 267. (in Russian)

12. Шеметков Л.А. 1984. О произведении формаций. Доклады АН БССР 28 (2): 101–103.

Shemetkov L.A. 1984. O proizvodanii formatsiy [On product of formations]. *Doklady AN BSSR*, 28 (2): 101–103. (in Russian)

13. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. 1989. Формации алгебраических систем. М., Наука, 253.

Shemetkov L. A., Skiba A.N. 1989. Formatsii algebraicheskikh sistem [Formations of Algebraic Systems]. Moscow, Nauka, 253. (in Russian)

14. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 2006, 385.

15. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 889.

16. Guo, W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London, Science Press, Kluwer Academic Publishers, 2000, 261.

17. Neumann B.H., Neumann Hanna, Neumann P.M. 1962. Wreath products and varieties of groups. *Mathematische Zeitschrift*, 80: 44–62.

18. Neumann P.M. 1964. On the structure of standard wreath products. *Mathematische Zeitschrift*, 84: 343–373.

19. Safonov V.G. 2006. On the modularity of a lattice of τ -closed totally saturated formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 58 (6): 967–973.

20. Safonov V.G. 2006. The property of being algebraic for the lattice of all τ -closed totally saturated formations. *Algebra and Logic*, 45 (5): 353–356.

21. Safonov V.G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. *Siberian Mathematical Journal*, 48 (1): 150–155.

22. Safonov V.G. 2010. \mathbf{G} -separability of the lattice of τ -closed totally saturated formations. *Algebra and Logic*, 49 (5): 470–479.

23. Skiba A.N., Shemetkov L.A. 2000. Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 10 (2): 112–141.



УДК 534.014.2

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-88-95

РАЗНОВИДНОСТИ РЕЗОНАНСОВ В МЕХАНИКЕ**VARIETY OF RESONANCES IN MECHANICS****И.П. Попов****I.P. Popov**

Курганский государственный университет,
Россия, 640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4

Kurgan state university,
63/4 Sovetskaja St, Kurgan, 640020, Russia

E-mail: ip.popov@yandex.ru

Аннотация

Даны определения механических резонансов сил и скоростей. Определение 1. Резонанс сил – это механический резонанс, возникающий на частоте ω в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими реактивные силы максимальны и противоположны. Определение 2. Резонанс скоростей – это механический резонанс, возникающий на частоте ω в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими скорости максимальны и противоположны. Доказаны две теоремы. Теорема 1. При выполнении условия $\omega < \omega_0$ в механической системе, состоящей из параллельно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера возникает резонанс сил. Теорема 2. При выполнении условия $\omega > \omega_0$ в механической системе, состоящей из последовательно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера возникает резонанс скоростей. Классический механический резонанс является резонансом сил.

Abstract

The definitions of mechanical resonances of forces and speeds are given. Definition 1. Mechanical resonance of forces is a mechanical resonance that occurs at a frequency ω in a mechanical system, including an inert body and an elastic element, at which the reactive forces developed by them are maximal and opposite. Definition 2. Mechanical speed resonance is a mechanical resonance that occurs at a frequency ω in a mechanical system, including an inert body and an elastic element, at which the speeds developed by them are maximum and opposite. Two theorems are proved. Theorem 1. When the condition $\omega < \omega_0$ is fulfilled in a mechanical system consisting of a parallel-connected inert body, an elastic element and a damper, a mechanical resonance of forces occurs. Theorem 2. When the condition $\omega > \omega_0$ is fulfilled in a mechanical system consisting of a series-connected inert body, an elastic element and a damper, a mechanical velocity resonance occurs. Classic mechanical resonance is a resonance of forces. It corresponds to a parallel connection of an inert body, an elastic element and a damper. When these elements are connected in series, a mechanical velocity resonance occurs. The resonance speeds mistaken for "antiresonance".

Ключевые слова: резонанс сил, скоростей, параллельное соединение, последовательное, источник силы, скорости.

Key words: resonance of forces, velocities, parallel connection, series, source of force, speed.

Введение

Широко известное дифференциальное уравнение [Архипов, 2011, с. 1383–1393; Аттаев, 2014, с. 17-19; Воронцов, 1988, с. 374-376; Геккиева, 2016, с. 32-35; Камке, 1965, с.

324; Олейник, 2010, с. 219; Разгулин, 1993, с. 69-80; Соболев, 1962, с. 117; Bernard, 2001, с. 233–256; Gil, 2011, с. 11–19; Lyons, 1998, с. 215–310; Selitskii, 2016, с. 85–91; Walther, 2003, с. 46–65]

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = a_\omega \sin \omega t \quad (1)$$

имеет решение $x = x_1 + x_2$, где

$$x_1 = ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (2)$$

– собственные затухающие колебания,

$$x_2 = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

– вынужденные колебания, a, α – постоянные интегрирования,

$$b = \frac{a_1}{2a_2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \quad A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad h = \frac{b}{\omega_0}, \quad \delta_0 = \frac{a_\omega}{a_0}. \quad (5)$$

При подстановках

$$a_2 = m, \quad a_1 = r, \quad a_0 = k, \quad a_\omega = F \quad (6)$$

уравнение (1) превращается в классическое дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний [Канунникова, 2014, с. 192–193]:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega t \quad \text{или} \quad m \frac{dv}{dt} + rv + k \int v dt = F \sin \omega t. \quad (7)$$

При

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

имеет место резонанс.

Теоретическая электротехника, объекты и процессы которой математически изоморфны механическим, различает два резонанса – резонанс напряжений и резонанс токов.

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий, в соответствии с которой напряжение дуально силе, а ток – скорости. В этой связи возникает закономерный вопрос: резонанс применительно к уравнению (7) – это резонанс сил или скоростей? Ответ на этот и связанные с ним вопросы составляет предмет настоящего исследования.

Определение 1. Резонанс сил – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими реактивные силы максимальны и противоположны.

Определение 2. Резонанс скоростей – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими скорости максимальны и противоположны.

Замечание. Сила \mathbf{F} и скорость \mathbf{v} – это векторные величины. Вместе с тем резонансные явления, как правило, рассматривают в одномерной системе координат, которая является вполне достаточной и для настоящего исследования. Поэтому далее векторная символика не применяется.

Резонанс сил

Уравнению (7) соответствует схема параллельного соединения (рис. 1), при котором инертное тело и изменения размеров упругого элемента и демпфера имеют единую скорость, а их реактивные силы складываются. При этом сумма реактивных сил потребителей механической мощности равна силе, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику напряжения в электротехнике можно назвать источником силы.

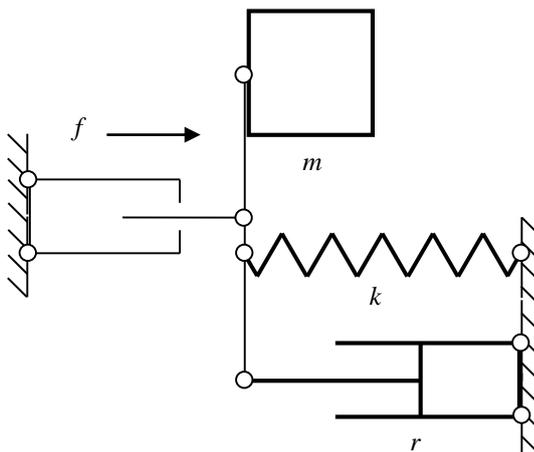


Рис. 1. Параллельное соединение

Fig. 1. Parallel connection

Справедлива

Теорема 1. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из параллельно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (7), возникает резонанс сил.

Доказательство. В соответствии с (4)–(6)

$$A = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + 4 \frac{r^2 m}{4m^2 k} \frac{m\omega^2}{k}}} = \frac{F}{k} \frac{1}{\omega/k \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} = \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}}.$$

В установившемся режиме

$$x = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$f_k = kx = \frac{kF}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9)$$

$$f_m = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m\omega^2 F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi).. \quad (10)$$

При выполнении условия (8)

$$f_k^* = \frac{kF}{\sqrt{k/m} \sqrt{\left(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m}\right)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\sqrt{mk}F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (11)$$

$$= \frac{\sqrt{k/m} \sqrt{mk}F}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{kF}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (12)$$

$$f_m^* = -\frac{m\sqrt{k/m}F}{\sqrt{\left(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m}\right)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\sqrt{mk}F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (13)$$

$$= -\frac{\omega \sqrt{mk}F}{\sqrt{k/mr}} \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\omega mF}{r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (14)$$

Выражения (11) и (13) показывают, что f_k^* и f_m^* равны и противоположны. Выражения (9) и (12), (10) и (14) показывают, что f_k^* и f_m^* максимальны.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. В первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие – последовательное соединение потребителей электрической мощности при резонансе напряжений дуально параллельному соединению потребителей механической мощности при резонансе сил.

Следствие 1.2. При резонансе сил реактивная сила системы упругий элемент – инертное тело равна нулю, поскольку $f_k^* = -f_m^*$.

Величину \sqrt{mk} по аналогии с электротехникой можно назвать *волновым сопротивлением* (системы).

Следствие 1.3. Если $\sqrt{mk} > r$, то реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Пример 1. $F = 100$ Н, $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 40$ кг·с⁻², $r = 5$ кг·с⁻¹. Найти f_k^* и f_m^* .

В соответствии с (12) и (14)

$$f_k^* = \frac{40 \cdot 100}{2 \cdot 5} \sin(\omega t - \varphi) = 400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)},$$

$$f_m^* = -\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{5} \sin(\omega t - \varphi) = -400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)}.$$

Реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Последовательное соединение

Инертное тело, упругий элемент и демпфер можно соединять не только параллельно, но и последовательно (рис. 2).

При последовательном соединении к элементам системы приложена единая сила, а скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера складываются.

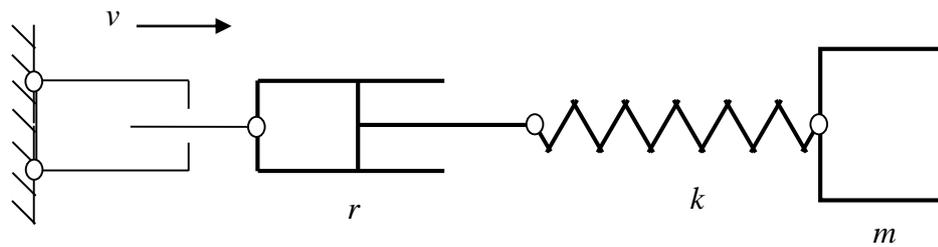


Рис. 2. Последовательное соединение

Fig. 2. Consecutive connection

При этом сумма скоростей потребителей механической мощности равна скорости, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику тока в электротехнике можно назвать источником скорости.

Скорости компонентов системы равны

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt, \quad v_k = -\frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}, \quad v_r = \frac{f}{r}, \quad v = -V \cos \omega t.$$

$$v_m + v_k + v_r = v,$$

$$\frac{1}{k} \frac{df}{dt} + \frac{f}{r} + \frac{1}{m} \int f dt = -V \cos \omega t \quad \text{или} \quad \frac{1}{k} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dt} + \frac{1}{m} f = V \omega \sin \omega t.$$

(15)

Последнее уравнение изоморфно (1). Собственные затухающие колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с (2) определяются выражением

$$f_1 = a e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) = a e^{-\frac{k}{2r} t} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k^2}{4r^2}} t + \alpha \right).$$

Вынужденные колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с (3) определяются выражениями

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}} = \frac{V\omega m}{\sqrt{\left(1-\omega^2 \frac{m}{k}\right)^2 + 4 \frac{k^2}{4r^2} \frac{m}{k} \omega^2 \frac{m}{k}}} = \frac{V\omega m}{\omega m \sqrt{\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2} = 2 \frac{k}{2r} \frac{\omega m}{k} \frac{1}{1-\omega^2 m/k} = \frac{\omega m}{r\omega m(1/\omega m - \omega/k)},$$

$$f_2 = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V}{\sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + 1/r^2}} \sin \left[\omega t - \operatorname{arctg} \frac{1}{r(1/\omega m - \omega/k)} \right].$$

Резонанс скоростей

Справедлива

Теорема 2. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из последовательно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (15), возникает резонанс скоростей.

Доказательство. В установившемся режиме

$$f = \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt = -\frac{1}{\omega m} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (16)$$

$$v_k = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (17)$$

При выполнении условия (8)

$$v_m^* = -\frac{1}{\sqrt{k/mm}} \frac{V}{\sqrt{[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m}/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (18)$$

$$= -\frac{\sqrt{k/m} Vr}{\omega \sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\omega m} \cos(\omega t - \varphi). \quad (19)$$

$$v_k^* = \frac{\sqrt{k/m}}{k} \frac{V}{\sqrt{[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m}/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (20)$$

$$= \frac{\omega Vr}{\sqrt{k/m} \sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\omega Vr}{k} \cos(\omega t - \varphi). \quad (21)$$

Выражения (18) и (20) показывают, что v_k^* и v_m^* равны и противоположны.

Выражения (16) и (19), (17) и (21) показывают, что v_k^* и v_m^* максимальны.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. В первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие: параллельное соединение потребителей электрической мощности при резонансе токов дуально последовательному соединению потребителей механической мощности при резонансе скоростей.

Следствие 2.2. При резонансе скоростей точка приложения силы к системе упругий элемент – инертное тело неподвижна, поскольку $v_k^* = -v_m^*$.

Следствие 2.3. Если $\sqrt{mk} < r$, то скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

Пример 2. $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $r = 80 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}$, остальные данные из примера 1. Найти v_k^* и v_m^* .

В соответствии с (19) и (21)

$$v_m^* = -\frac{10 \cdot 80}{2 \cdot 10} \cos(\omega t - \varphi) = -40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$v_k^* = \frac{2 \cdot 10 \cdot 80}{40} \cos(\omega t - \varphi) = 40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

Скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

Артефакты

Существуют устройства, способные в удовлетворительном приближении выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания. В [Пановко, 1987, с. 236] описана механическая система из двух инертных тел и двух упругих элементов, для которой обнаружено «удивительное явление», при котором точка приложения гармонической силы остается неподвижной. Это явление, казалось бы, очевидным образом названо антирезонансом. Степень неудачности этого термина можно оценить, применив его к резонансу токов в электротехнике. В действительности упомянутая система представляет собой суперпозицию «элементарных» систем, рассмотренных выше. По этой причине процессы, происходящие в ней, являются суперпозицией соответствующих процессов, одним из которых и был резонанс скоростей, ошибочно принятый за «антирезонанс». При этом неподвижность точки приложения гармонической силы («удивительное явление») соответствует следствию 2.2.

Заключение

Описываемый в курсах теоретической механики механический резонанс является резонансом сил. Ему соответствует параллельное соединение инертного тела, упругого элемента и демпфера. При последовательном соединении этих элементов возникает резонанс скоростей, ошибочно принимаемый за «антирезонанс».

Существование двух механических резонансов естественным образом соответствует аналогиям между электрическими и механическими явлениями и объектами. Механическому резонансу сил соответствует резонанс напряжений в электротехнике, а резонансу скоростей – резонанс токов. Подобно тому, как оба электрических резонанса примерно в равной мере встречаются в электротехнике, отдать приоритет какому-либо из двух механических резонансов также затруднительно. При резонансе сил реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, могут значительно превышать приложенную силу. В то же время реактивные силы нейтрализуют друг друга, что может быть использовано в специальных устройствах самокомпенсации реактивной мощности, например, для повышения качества тока питающей сети. При резонансе скоростей скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, могут значительно превышать скорость штока источника воздействия. При этом точка приложения силы к системе упругий элемент – инертное тело неподвижна, что используется для разработки гасителей колебаний.

Список литературы References

1. Архипов В.П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. уравнения, 47(10): 1383–1393.
Arkhipov V.P. 2011. Linejnye differencial'nye uravneniya vtorogo poryadka s vyrozhdajushchimsya koehfficientom pri starshej proizvodnoj [Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative]. Differential Equations, 47(10): 1383–1393 (in Russian).
2. Атаев А.Х. 2014. Краевые задачи с внутреннекраевым смещением для уравнения колебания струны. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 16(2): 17-19.
Attaev A.Kh. 2014. Kraevye zadachi s vnutrennekravym smeshcheniem dlya uravneniya kolebaniya struny [A boundary value problems with inner shift for the string equation]. Reports Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, 16(2): 17-19 (in Russian).

3. Воронцов М.А., Думаревский Ю.Д., Пруидзе Д.В., Шмальгаузен В.И. 1988. Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью. Изв. АН СССР. Физика, 52(2): 374-376.

Voroncov M.A., Dumarevskii Yu.D., Pruidze D.V. Shmalgauzen V.I. 1988. Avtovolnovye processy v sistemah s opticheskoi obratnoy svyaz'yu [Avtovolnovie processi v sistemah s opticheskoi obratnoi svyazyu]. Izv. AN SSSR. Fizika, 52(2): 374-376 (in Russian).

4. Геккиева С.Х. 2016. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, № 6(227), вып. 42: 32-35.

Gekkieva S.Kh. 2016. Smeshannye kraevye zadachi dlya nagruzhennogo diffuzionno- volnovoogo uravneniya [Mixed boundary value problems for the loaded diffusion-wave equation]. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, №6(227), Iss. 42: 32-35 (in Russian).

5. Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука: 703.

Kamke E. 1965. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow: Nauka (in Russian).

6. Канунникова Е.А. 2014. Об одном подходе к решению внешних краевых задач для уравнений колебаний. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. № 19(190), выпуск 36: 192–193.

Kanunnikova E.A. 2014. Ob odnom podhode k resheniyu vneshnih kraevykh zadach dlya uravnenij kolebanij [An approach to solution of the external boundary value problems of wave equation]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. № 19(190), 36: 192–193. (In Russian)

7. Олейник О.А., Радкевич Е.В. 2010. Уравнения с неотрицательной характеристической формой, МГУ, Москва, 624.

Oleinic O.A., Radkevich E.V. 2010. Uravneniya s neotricatel'noj harakteristicheskoy formoj [Equations with nonnegative characteristic form], Moscow State University, Moscow, 624 (in Russian).

8. Пановко Я.Г., Губанова И.И. 1987. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 352.

Panovko YA.G., Gubanova I.I. 1987. Ustojchivost' i kolebaniya uprugih sistem: Sovremennye koncepcii, paradoksy i oshibki [Stability and oscillations of elastic systems: Modern concepts, paradoxes and errors]. Moscow. Nauka Publ., 352 (In Russian)

9. Разгулин А.В. 1993. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. Журнал вычислительной математики и математической физики, 33(1): 69-80.

Razgulin A.V. 1993. Ob avtokolebaniyah v nelineinoi parabolicheskoi zadache s preobrazovannim argumentom [On self-oscillations in a nonlinear parabolic problem with a transformed argument]. Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 33(1): 69-80 (in Russian).

10. Соболев С.Л. 1962. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 255.

Sobolev S.L. 1962. Nekotorye primeneniya funkcional'nogo analiza v matematicheskoi fizike [Some applications of functional analysis in mathematical Physics], Novosibirsk: Izd-vo SA AN SSSR, 255. (in Russian).

11. Bernard S., Brelair J., Mackey M.C. 2001. Sufficient conditions for stability of linear differential equations with distributed delay. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 1, no. 2: 233–256.

12. Gil' M.I. 2011. Stability of functional differential equations with oscillating coefficients and distributed delays. Differential equations & applications, vol. 3, no. 1: 11–19.

13. Lyons T. 1998. Differential equations driven by rough signals. Revista Matematica Iberoamericana, 14(2): 215–310.

14. Selitskii A.M. 2016. On the solvability of parabolic functional differential equations in Banach spaces. Eurasian Math. J., 7(4): 85–91.

15. Walther H.-O. 2003. The solution manifold and C^1 -smoothness for differential equations with state-dependent delay. J. Differential Equations, vol. 195: 46–65.

ФИЗИКА PHYSICS

УДК 530.182

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-96-103

ЛОКАЛИЗАЦИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ ДЕФОКУСИРУЮЩЕГО СЛОЯ С ФОКУСИРУЮЩИМИ ОБКЛАДКАМИ, РАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОТКЛИКОМ

LOCALIZATION IN A SYMMETRIC THREE-LAYER STRUCTURE CONSISTING OF A DEFOCUSING LAYER WITH FOCUSING COVERS SEPARATED BY INTERFACES WITH A NONLINEAR RESPONSE

С.Е. Савотченко
S.E. Savotchenko

Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова
Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46

V.G. Shukhov Belgorod State Technological University
46 Kostukova St., Belgorod, 308012, Russia

E-mail: savotchenkose@mail.ru

Аннотация

Рассмотрены особенности локализации стационарных состояний в симметричной трехслойной структуре, в которой внутренний слой характеризуется дефокусирующей керровской нелинейностью, а внешние обкладки – фокусирующей. Для описания локализации поля вблизи границ раздела с нелинейным откликом использовано нелинейное уравнение Шредингера с нелинейным самосогласованным потенциалом. Показано, что существует локализованное состояние с антисимметричным распределением профиля поля относительно середины внутреннего слоя. Найдены в явном аналитическом виде энергии стационарных локализованных состояний и проанализированы условия их существования.

Abstract

The peculiarities of stationary state localization in a symmetric three-layer structure, in which the inner layer is characterized by a defocusing Kerr nonlinearity, and the outer plates are focused, are considered. Nonlinear Schrödinger equation with a nonlinear self-consistent potential was used to describe the localization of the field near the interfaces with a nonlinear response. It is shown that a localized state exists with an antisymmetric distribution of the field profile relative to the middle of the inner layer. The energies of stationary localized states are found in an explicit analytic form and the conditions for their existence are analyzed.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, слоистая среда, плоский дефект, граница раздела сред, нелинейные поверхностные волны, локализованные состояния.

Keywords: Schrödinger equation, layered medium, planar defect, interface, nonlinear surface waves, localized states.

Введение

Теоретическое описание нелинейных явлений, акцентируемое на изучении особенностей локализации возбуждений различной физической природы вблизи разнообразных дефектов, в том числе границ раздела сред, имеет большое значение для технических приложений [Nonlinearity and Disorder, 2001; Kivshar, 2003; Carretero-González, 2013]. При математическом моделировании таких эффектов используются нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, особое место среди которых занимает нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [Давыдов, 1984; Косевич, 1989].

Распространению волн в слоистых средах, в том числе и трехслойных структурах, посвящено большое количество теоретических работ [Михалаке, 1989; Kartashov, 2011; Коровай, 2010; Qian 2009; Panyayev, 2016; Trofimov 2017]. Однако в большинстве из них пренебрегается взаимодействием поля волны с границами раздела слоев. Влияние взаимодействия границы раздела слоев в симметричных трехслойных структурах на локализацию поля рассматривалось в работах Герасимчук [2000, 2003].

В случае, когда слои представляют собой нелинейные оптические среды, имеет смысл учитывать и нелинейный отклик взаимодействия поля волны с тонкой границей как с плоским дефектом [Gerasimchuk, 2012; Gerasimchuk, 2015].

В данной работе будут рассмотрены эффекты локализации поля в симметричной трехслойной структуре при наличии нелинейного отклика границ раздела слоев. В рассматриваемой структуре внутренний слой, характеризующийся дефокусировкой (отрицательной керровской нелинейностью), окружен симметричными обкладками с нелинейностью противоположного знака, то есть с фокусировкой. В силу симметрии структуры появляется возможность описать аналитически простые стационарные локализованные состояния, также обладающие симметрией. При моделировании такой структуры используется НУШ с нелинейным самосогласованным потенциалом, использованным ранее в ряде работ [Gerasimchuk, 2012, 2015; Савотченко, 2018a, b, c, d, e, 2019a, b; Savotchenko, 2018a, b, c, d, e] для описания взаимодействия возбуждений с границей раздела слоев.

1. Уравнения модели

Рассмотрим трехслойную структуру, в которой внутренний слой толщины $2a$ с отрицательной (дефокусирующей) нелинейностью керровского типа разделяет два кристалла с положительной (фокусирующей) нелинейностью керровского типа. Фактически рассматриваемая система представляет собой тонкий дефокусирующий слой между двумя массивными фокусирующими обкладками.

Границы раздела сред будем считать плоскими, а их толщину много меньше характерного масштаба локализации возмущений параметров среды, создаваемых ими. Ширина внутреннего слоя будет считаться существенно больше ширины границ раздела слоев. В данном контексте плоскопараллельные границы раздела слоев можно называть волноводами.

Выберем систему координат так, чтобы середина нелинейного слоя проходила через начало координат. Границы раздела слоев лежат в плоскостях $x = \pm a$ перпендикулярно оси x . Пусть фокусирующие обкладки занимают полупространства $|x| > a$, а оптический слой с дефокусирующей нелинейностью расположен в области $|x| < a$.

Как было показано [Gerasimchuk, 2012, 2015; Савотченко, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d; 2018e; 2019a; 2019b; Savotchenko, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d; Savotchenko, 2018e], для описания распределения поля в световом пучке, локализованном вдоль волноводов, можно использовать одномерное НУШ:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \Omega \psi - \gamma(x) |\psi|^2 \psi + U(x, |\psi|^2) \psi, \quad (1)$$

где m – эффективная масса возбудений (положительная постоянная величина).

В НУШ (1) потенциал, описывающий нелинейные свойства границ раздела, имеет вид [Савотченко, 2019а, b]:

$$U(x, |\psi|^2) = \{U_0 - W_0 |\psi|^2\} \{\delta(x+a) + \delta(x-a)\}, \quad (2)$$

где величина U_0 интерпретируется как интенсивность взаимодействия возбудений поля с границами раздела в линейном приближении («мощность» дефекта). При $U_0 > 0$ возбудения отталкиваются от границы, а при $U_0 < 0$ – притягиваются. Параметр нелинейности границ раздела слоев W_0 характеризует нелинейный отклик их взаимодействия с возбудениями. При $W_0 > 0$ соответствующая граница характеризуется внутренней фокусировкой, а при $W_0 < 0$ – дефокусировкой.

Керровскую нелинейность в НУШ (1) будем аппроксимировать кусочно-постоянной функцией:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_0, & x < -a \\ -g_0, & |x| < a \\ \gamma_0, & x > a \end{cases}$$

где $\gamma_0 > 0$ и $g_0 > 0$ – постоянные величины.

Характеристики слоев $\Omega(x)$ также будем аппроксимировать кусочно-постоянной функцией:

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1, & x < -a; \\ \Omega_0, & |x| < a; \\ \Omega_1, & x > a; \end{cases}$$

где $\Omega_1 > 0$ и $\Omega_0 > 0$ – постоянные величины.

Стационарные состояния с энергией E определяются после подстановки зависимости $\psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt)$ в НУШ (1) из стационарного НУШ:

$$\psi'' + 2m\psi\{E - \Omega + \gamma(x)|\psi|^2 - U(x, |\psi|^2)\} = 0. \quad (3)$$

Решение НУШ (3) с потенциалом (2) эквивалентно решению НУШ без потенциала:

$$\psi'' + 2m\psi\{E - \Omega + \gamma(x)|\psi|^2\} = 0, \quad (4)$$

с граничными условиями:

$$\psi(\mp a - 0) = \psi(\mp a + 0) = \psi_{0j}, \quad (5)$$

$$\psi'(\mp a + 0) - \psi'(\mp a - 0) = 2m\{U_0 - W_0 |\psi_{0j}|^2\} \psi_{0j}. \quad (6)$$

где $\psi_{0j} = \psi(\pm a)$ – амплитуды поля на границах раздела слоев. Здесь и далее значение индекса $j = 1$ соответствует величинам, относящимся к области $x < -a$, $j = 2$ – к области $x > a$, $j = 0$ – к внутреннему слою при $|x| < a$. При этом в формулах (5), (6) и далее для $j = 1$ следует выбирать верхний знак, а для $j = 2$ – нижний.

При отсутствии взаимодействия поля с границами раздела слоев, когда $U_0 = 0$, $W_0 = 0$, из условия (6) получается условие непрерывности производной поля. Такой случай, как для одиночной границы раздела двух полупространств, так и для трехслойных структур, был наиболее подробно проанализирован Михалаке [1989].

В случае одной границы раздела в плоскости $x=0$ при $U_0 = 0$, $W_0 \neq 0$ и $a = 0$ для случая нелинейного плоского дефекта из условия (6) получается одно граничное условие [Gerasimchuk, 2012, 2015; Савотченко, 2018а], а для случая обоих ненулевых параметров

U_0 и W_0 – описано Савотченко [2018b; 2018c; 2018d;]. Для системы двух плоскопараллельных дефектов с линейным взаимодействием $U_0 \neq 0$, $W_0 = 0$ и $a \neq 0$ из условия (6) получаются граничные условия [Герасимчук, 2000, 2003]. При $U_0 = 0$, $W_0 \neq 0$ и $a \neq 0$ из условия (6) получаются граничные условия [Savotchenko, 2018e] для двух плоскопараллельных дефектов с преобладающим нелинейным откликом, а при обоих ненулевых параметрах U_0 и W_0 – в других работах [Савотченко, 2019а, 2019b].

2. Локализованное состояние

Если энергия стационарного состояния лежит в диапазоне $\Omega_0 < E < \Omega_1$, то НУШ (4) имеет частное решение в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} -A/\operatorname{ch}q(x+a), & x < -a, \\ A_s \operatorname{sn}(q_s x, k), & |x| < a, \\ A/\operatorname{ch}q(x-a), & x > a, \end{cases} \quad (7)$$

описывающее локализованное состояние с антисимметричным распределением профиля поля относительно середины внутреннего слоя, то есть обладающее свойством нечетности: $\psi(-x) = -\psi(x)$. Здесь k – модуль эллиптического синуса.

Решение (7) всюду ограничено и удовлетворяет условию исчезновения на бесконечности: $|\psi(x)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Параметры решения (7) определяются выражениями, получаемыми после подстановки (7) в НУШ (4):

$$A_s = q_s (mg_0)^{-1/2}, \quad (8)$$

$$q_s^2 = 2m(E - \Omega_0)/(1 + k^2), \quad (9)$$

$$A = q(m\gamma_0)^{-1/2}, \quad (10)$$

$$q^2 = 2m(\Omega_1 - E). \quad (11)$$

Подстановка решения (7) в граничные условия (5) и (6) приводит к системе дисперсионных уравнений:

$$q = \eta q_s \operatorname{sn}(q_s a, k). \quad (12)$$

$$\frac{q_s \operatorname{cn}(q_s a, k) \operatorname{dn}(q_s a, k)}{\operatorname{sn}(q_s a, k)} = w_0 q^2 - u_0 \quad (13)$$

где $\eta = (\gamma_0/g_0)^{1/2}$, $u_0 = 2mU_0$, $w_0 = 2W_0/\gamma_0$.

Из уравнения (12) можно выразить эллиптический синус и подставить его в уравнение (13), исключив тем самым ширину a из системы. В результате получается одно дисперсионное уравнение:

$$(\eta^2 q_s^2 - q^2)^{1/2} (\eta^2 q_s^2 - k^2 q^2)^{1/2} = \eta q (q^2 w_0 - u_0), \quad (14)$$

определяющее зависимость энергии локализации от параметров нелинейности кристаллов и характеристик границы их раздела.

Используя связь

$$q_s^2 = (\omega - q^2)/(1 + k^2), \quad (15)$$

вытекающую из выражений (9) и (11), где обозначили $\omega = 2m(\Omega_1 - \Omega_0) > 0$, дисперсионное уравнение (14) можно переписать в виде:

$$q^6 \eta w_0^2 - a_q q^4 + b_q q^2 - \{\omega \eta^2 / (1 + k^2)\}^2 = 0, \quad (16)$$

где $a_q = 2\eta u_0 w_0 + (1 + \eta^2)(\eta^2 + k^2)$, $b_q = \eta\{u_0^2 + \omega(1 + k^2 + 2\eta^2)/(1 + k^2)\}$.

3. Результаты и обсуждение

Решения дисперсионного уравнения (16) можно получить в явном аналитическом виде в ряде предельных случаев.

1) Пусть выполняется условие малости $\omega\eta \ll 1$, реализуемое, когда нелинейность внутреннего слоя существенно превосходит нелинейность обкладок. В этом случае решение дисперсионного уравнения (16) имеет вид:

$$q^2 = q_{10}^2 + q_{20}^2 + q_{30}^2, \quad (17)$$

где

$$q_{10}^2 = u_0 / w_0, \quad q_{20}^2 = (1 + \eta^2)(\eta^2 + k^2) / 2\eta w_0^2, \\ q_{30}^2 = \{(1 + \eta^2)(\eta^2 + k^2)(4\eta u_0 w_0 + (1 + \eta^2)(\eta^2 + k^2))\}^{1/2} / 2\eta w_0^2.$$

В уравнении (17) первое слагаемое не зависит от параметров нелинейности, а второе слагаемое не зависит от интенсивности границы раздела u_0 . При этом все слагаемые в уравнении (17) зависят от интенсивности нелинейного отклика границ раздела слоев w_0 . Следовательно, для существования локализованного состояния с энергией

$$E = \Omega_1 - q^2 / 2m, \quad (18)$$

куда подставляется (17), наличие нелинейного отклика границ раздела сред является обязательным требованием.

2) Если дополнительно к предыдущему условию потребовать, чтобы модуль эллиптической функции выражался через параметры трехслойной структуры в виде

$$k^2 = (1 + \eta^2)\{[1 - 4\eta(\eta + 2u_0 w_0) / (1 + \eta^2)^2]^{1/2} - 1\} / 2, \quad (19)$$

то энергия локализации примет вид

$$E = \Omega_1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{\gamma_0 U_0}{m W_0} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Для существования локализованного состояния с энергией (20) параметры границ раздела слоев должны иметь противоположные знаки.

3) Если нелинейный отклик границ раздела слоев пренебрежительно мал, то дисперсионное уравнение (16) имеет решение:

$$q^2 = q_a^2 \{1 \pm (1 - q_b^2 / q_a^2)^{1/2}\}, \quad (21)$$

где $q_a^2 = \eta\{u_0^2(1 + k^2) + 4\omega(1 + k^2 + 2\eta^2)\} / 2(1 + k^2)^2(\eta^2 + k^2)$, $q_b^2 = 2\eta^3\omega^2 / (1 + k^2)^2$.

Решению (21) соответствует, согласно (18), энергия локализации:

$$E = \Omega_1 - \Omega_a \{1 \pm (1 - \Omega_b / \Omega_a)^{1/2}\}, \quad (22)$$

где $\Omega_{a,b} = q_{a,b}^2 / 2m$.

Локализация поля с энергией (22) возможна при выполнении условия: $U_0^2 > U_c^2$, где

$$U_c^2 = (\Omega_1 - \Omega_0)\{\eta(1 + k^2)^{1/2}(\eta^2 + k^2)^{1/2} - 2(1 + k^2 + 2\eta^2)\} / m(1 + k^2).$$

4) Если дополнительно к предыдущему условию потребовать, чтобы $U_0 = U_c$, то $q = q_a$, а энергия локализации $E = \Omega_1 - \Omega_a$. Требование $U_0 = U_c$ фактически означает, что модуль эллиптической функции выражается через параметры трехслойной структуры определенным образом, получаемым из данного уравнения.

Заключение

В работе рассмотрена симметричная трехслойная структура из нелинейных слоев, причем внутренний слой характеризуется дефокусировкой, а внешние обкладки обладают фокусирующей керровской нелинейностью. Для теоретического описания локализации поля вблизи границ раздела слоев использовано НУШ. Взаимодействие поля с границами разделов слоев моделировалось нелинейным самосогласованным потенциалом.

Показано, что в рассматриваемой системе существует локализованное состояние с антисимметричным распределением профиля поля относительно середины внутреннего слоя, то есть обладающее свойством нечетности. Найдены в явном аналитическом виде энергии стационарных локализованных состояний и указаны условия их существования.

Полученные результаты могут иметь значение для разработки и совершенствования оптических волноводных систем с заданными характеристиками, оптических устройств управления на основе слоистых сред, а также различных оптических переключателей и ограничителей мощности, способных пропускать световые импульсы выше или ниже заданного значения потока энергии [Zhang, 1995; Strudley, 2014; Zhong, 2018].

Список литературы References

1. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2000. Локализация нелинейных волн в слоистых средах. Физика низких температур, 26 (8): 799-809.
Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2000. Lokalizacija nelinejnyh voln v sloistyh sredah. [Localization of nonlinear waves in layered media] Fizika nizkih temperature. 26 (8): 799-809. (in Russian)
2. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2003. Локализация нелинейных волн между интерфейсами. Физика твердого тела, 45 (6): 1088-1090.
Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2003. Lokalizacija nelinejnyh voln mezhdru interfejsami [Localization of non-linear waves between interfaces]. Fizika tverdogo tela, 45 (6): 1088-1090. (in Russian)
3. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984, 288 с.
Davydov A.S. Solitony v molekulyarnyh sistemah [Solitons in molecular systems]. Kiev: Naukova dumka, 1984, 288 p. (in Russian)
4. Коровай О.В., Хаджи П.И. 2010. Нелинейные ТЕ-поляризованные квазиповерхностные волны в симметричном световоде с нелинейной сердцевиной. Физика твердого тела, 52 (11): 2277-2282.
Korovaj O.V., Hadzhi P.I. 2010. Nelinejnye TE-poljarizovannye kvazipoverhnostnye volny v simmetrichnom svetovode s nelinejnoy serdcevinoy [Nonlinear TE-polarized quasi-surface waves in a symmetric fiber with a nonlinear core]. Fizika tverdogo tela, 52 (11): 2277-2282. (in Russian)
5. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989, 304 с.
Kosevich A.M., Kovalev A.S. Vvedenie v nelinejnuju fizicheskiju mehaniku [Introduction to Nonlinear Physical Mechanics]. Kiev: Naukova dumka, 1989, 304 p. (in Russian)
6. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. 1989. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 20 (1): 198-253.
Mihalake D., Nazmitdinov R.G., Fedjanin V.K. 1989. Nelinejnye opticheskie volny v sloistyh strukturah [Nonlinear optical waves in layered structures]. Fizika jelementarnyh chastic i atomnogo jadra, 20 (1): 198-253. (in Russian)
7. Савотченко С.Е. 2018. Неоднородные состояния в нелинейной самофокусирующей среде, порождаемые нелинейным дефектом. Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики, 107 (8): 481-483.
Savotchenko S.E. 2018. Neodnorodnye sostojanija v nelinejnoy samofokusirujushhej srede, porozhdaemye nelinejnym defektom [Heterogeneous states in a nonlinear self-focusing medium]



generated by a nonlinear defect]. *Pis'ma v zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki*, 107 (8): 481-483. (in Russian)

8. Савотченко С.Е. 2018. Особенности локализации возбуждений вблизи нелинейного слоя между линейными средами, разделенными плоскими дефектами с нелинейными свойствами. *Нелинейный мир*, 3: 25-32.

Savotchenko S.E. 2018. Osobennosti lokalizacii vozbuzhdenij vblizi nelinejnogo sloja mezhdu linejnymi sredami, razdelennymi ploskimi defektami s nelinejnymi svojstvami [Localization of excitations near the nonlinear layer between linear media separated by flat defects with nonlinear properties]. *Nelinejnyj mir*, 3: 25-32. (in Russian)

9. Савотченко С.Е. 2018. Периодические состояния вблизи плоского дефекта с нелинейным откликом, разделяющего нелинейный самофокусирующий и линейный кристаллы. *Конденсированные среды и межфазные границы*, 20 (2): 255-262.

Savotchenko S.E. 2018. Periodicheskie sostojanija vblizi ploskogo defekta s nelinejnym otklikom, razdeljajushhego nelinejnyj samofokusirujushhij i linejnyj kristally [Periodic states near a flat defect with a nonlinear response dividing nonlinear self-focusing and linear crystals]. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy*, 20 (2): 255-262. (in Russian)

10. Савотченко С.Е. 2018. Пространственно-периодические неоднородные состояния в нелинейном кристалле с нелинейным дефектом. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 154, 3(9): 514-525.

Savotchenko S.E. 2018. Prostranstvenno-periodicheskie neodnorodnye sostojanija v nelinejnom kristalle s nelinejnym defektom [Spatially periodic inhomogeneous states in a nonlinear crystal with a nonlinear defect]. *Zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki*, 154, 3(9): 514-525. (in Russian)

11. Савотченко С.Е. 2018. Энергия запираания поля на нелинейной границе раздела нелинейных дефокусирующих сред. *Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики*, 108 (8): 175-179.

Savotchenko S.E. 2018. Jenergija zapiraniya polja na nelinejnoj granice razdela nelinejnyh defokusirujushhij sred [The field locking energy at the nonlinear interface of nonlinear defocusing media]. *Pis'ma v zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki*, 108 (8): 175-179. (in Russian)

12. Савотченко С.Е. 2019. Локализация возбуждений в слоистой структуре с границами раздела, характеризующимися нелинейным откликом. *Физика твердого тела*. 61 (3): 571-580.

Savotchenko S.E. 2019. Lokalizacija vozbuzhdenij v sloistoj strukture s granicami razdela, harakterizujushhimisja nelinejnym otklikom [Localization of excitations in a layered structure with interfaces characterized by a nonlinear response]. *Fizika tverdogo tela*. 61 (3): 571-580. (in Russian)

13. Савотченко С.Е. 2019. Особенности локализации нелинейных спиновых волн в слоистом ферромагнетике, обусловленные магнитной анизотропией. *Физика твердого тела*. 61 (4): 698-702.

Savotchenko S.E. 2019. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh spinovyh voln v sloistom ferromagnetike, obuslovlennye magnitnoj anizotropiej [Localization features of nonlinear spin waves in a layered ferromagnet, due to magnetic anisotropy]. *Fizika tverdogo tela*. 61 (4): 698-702. (in Russian)

14. Carretero-González R., Cuevas-Maraver J., Frantzeskakis D., Karachalios N., Kevrekidis P., Palmero-Acebedo F. *Localized Excitations in Nonlinear Complex Systems*, Springer Science & Business Media, 2013, 432.

15. Gerasimchuk I.V. 2015. Localized states and their stability in an anharmonic medium with a nonlinear defect, *JETP*. 121: 596-605.

16. Gerasimchuk I.V., Gorbach P.K., Dovhopolyi P.P. 2012. Localized states in a nonlinear medium containing a plane defect layer with nonlinear properties, *Ukr. J. Phys.* 57: 678-683.

17. Kartashov Y.V., Malomed B.A., Torner L. 2011. Solitons in nonlinear lattices, *Rev. of Mod. Phys.* 83: 247.

18. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego, 2003, 540 p.

19. *Nonlinearity and Disorder: Theory and Applications*, Eds: F. Abdullaev, O. Bang, M. P. Sorensen, Springer, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2001, 445 p.

20. Panyaev I.S., Dadoenkova N.N., Dadoenkova Yu.S., Rozhleys I.A., Krawczyk M., Lyubchanckii I.L., Sannikov D.G. 2016. Four-layer nanocomposite structure as an effective optical waveguide switcher for near-IR regime, *J. of Phys. D: Applied Phys.* 49: 435103.

21. Qian Zh., Jin F., Lu T., Kishimoto K. 2009. Transverse surface waves in an FGM layered structure, *Acta Mechanica*, 207: 183-193.
22. Savotchenko S.E. 2018. Localization on the interface with nonlinear response between linear and nonlinear focusing media. *Surfaces and Interfaces*. 13: 157-162.
23. Savotchenko S.E. 2018. Localized states near the interface with anharmonic properties between nonlinear media with different characteristics. *Modern Physics Letters B*. 32 (10): 1850120-12.
24. Savotchenko S.E. 2018. Peculiarities of linear wave interaction with nonlinear media interface. *Modern Physics Letters B*. 32 (30): 1850371-13.
25. Savotchenko S.E. 2018. Stationary states near the interface with anharmonic properties between linear and nonlinear defocusing media. *Solid State Communications*. 283 (11): 1-8.
26. Savotchenko S.E. 2018. The field blocking on the interface with nonlinear response between nonlinear focusing media. *Turkish Journal of Physics*. 42: 721-736.
27. Strudley T., Bruck R., Mills B., Muskens O.L. 2014. An ultrafast reconfigurable nanophotonic switch using wavefront shaping of light in a nonlinear nanomaterial, *Light: Science & Applications* 3: e207.
28. Trofimov V.A., Zakharova I.G., Shestakov P.Y., Nonlinear localization of chirped femtosecond pulse in layered photonic structure, 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS), St. Petersburg, (2017) 3378-3382.
29. Zhang D., Li Z., Hu W., Cheng B. 1995. Broadband optical reflector - an application of light localization in one dimension *Appl. Phys. Lett.* 67: 2431.
30. Zhong N., Wang Z., Chen M., Xin X., Wu R., Cen Y., Li Y. 2018. Three-layer-structure polymer optical fiber with a rough inter-layer surface as a highly sensitive evanescent wave sensor, *Sensors and Actuators B: Chem.* 254: 133-142.



УДК 533.72:532

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-104-114

**ОСОБЕННОСТИ ДИФФУЗИО-И ФОТОФОРЕТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ
КРУПНОЙ СЛАБО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ
ПРИ МАЛЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕПАДАХ ТЕМПЕРАТУРЫ**

**FEATURES OF DIFFUSION-AND PHOTOPHORETIC MOTION
OF LARGEWEAKLY EVAPORATING DROPLET
AT SMALL RELATIVE TEMPERATURE DIFFERENCES**

¹Н.В. Малай, ²Е.Р. Щукин, ¹И.М. Зинькова, ³З.Л. Шулиманова
¹N.V. Malay, ²E.R. Shchukin, ¹I.M. Zinkova, ³Z.L. Shulimanova

¹Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University,
85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

²Объединенный институт высоких температур РАН,
Россия, Москва, ул. Ижорская, д. 13/19
The Leading Scientist of Joint Institute for High Temperatures
of the Russian Academy of Science,
13/19 Izhora St, Moscow, Russia

³Российский университет транспорта (МИИТ),
Россия, 125190, Москва, ул. Часовая, д. 22/2
Russian University of Transport,
22/2 Hour St, Moscow, 125190, Russia

E-mail: malay@bsu.edu.ru; evgrom@yandex.ru;
zinaida110@yandex.ru; 781596@bsu.edu.ru

Аннотация

В квазистационарном приближении при числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы решена задача о влиянии движения среды (учет конвективных членов в уравнениях диффузии и теплопроводности) на диффузио-и фотофорез крупной слабо испаряющейся капли сферической формы, внутри которой действуют тепловые источники в бинарной вязкой газообразной среде. Получены аналитические формулы для силы и скорости упорядоченного движения капли, в которых учтено не только тепловое и диффузионное скольжения, но и зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Проведенные качественные оценки показали, что движение среды не влияет на диффузиофорез.

Abstract

In the *quasistationary* approximation when the Reynolds and Pecle many smaller units solved the problem of the influence of motion of the medium (account of convective members in the equations of diffusion and thermal conductivity) diffusion-and photophoresis of the large evaporating droplets loosely of spherical shape, inside which there are heat sources in binary viscous gaseous medium. Analytical formulas for the force and velocity of the droplet motion are obtained, which take into account not only thermal and diffusion sliding, but also the dependence of the surface tension coefficient on temperature. Qualitative assessments have shown that the movement of the medium does not affect diffusiophoresis.

Ключевые слова: диффузиофорез, фотофорез аэрозольной частицы сферической формы.

Keywords: diffusiophoresis, photophoresis of an aerosol particle of the spherical form.

Введение

В многокомпонентных газах с неоднородным распределением температуры и концентрации может возникнуть упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное внешним заданным градиентом концентрации, называют диффузиофорезом [Яламов, 1985]. Это явление отчетливо проявляется в процессах испарения и конденсации [Яламов, 1972].

Явление фотофореза в газе заключается в движении частиц в поле электромагнитного излучения под действием радиометрической силы [Preining, 1966]. Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей внутри нее происходит выделение тепловой энергии с некоторой объемной плотностью q_i , которая неоднородно нагревает частицу. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы более горячей может оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому имеет место как положительный (движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения электромагнитного излучения движение частицы в газе. Явления диффузио- и фотофореза практически всегда сопутствуют термодинамически неравновесным дисперсным системам.

Диффузио- и фотофоретическая сила может оказывать значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах тепло- и массообменников, на движение частиц в зонах просветления дисперсных систем и в окрестностях вымывающих частицы капель; может использоваться при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, отборе аэрозольных проб, нанесении заданной толщины специальных покрытий из частиц, получении высококачественных оптических волокон и.д. Поэтому изучение особенностей диффузио- и фотофоретического движения различного вида аэрозольных частиц является важным и актуальным вопросом, представляющим как научный, так и практический интерес.

1. Постановка задачи

Рассматривается крупная слабо испаряющаяся капля сферической формы радиуса R с плотностью ρ_i и вязкостью μ_i , внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла плотностью q_i , помещенная в неограниченную бинарную газовую смесь с плотностью ρ_e и вязкостью μ_e . С помощью внешних источников в газе стационарно поддерживаются градиенты относительных концентраций компонент смеси $\nabla C_{1\infty}$ и $\nabla C_{2\infty}$. Через C_1 и C_2 обозначены отношения $C_1 = n_1/n_e$, $C_2 = n_2/n_e$, $C_1 + C_2 = 1$, $n_e = n_1 + n_2$ – полное количество молекул в единице объема, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$ – плотность бинарной газовой смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, n_1 , m_1 и n_2 , m_2 –

соответственно, концентрация и масса молекул первого и второго компонента бинарной газовой смеси. Между градиентами $\nabla C_{1\infty}$ и $\nabla C_{2\infty}$ имеется очевидное соотношение $\nabla C_{1\infty} = -\nabla C_{2\infty}$. Капля считается крупной. Для классификации частиц по размерам применяют критерий Кнудсена [Яламов, 1972]: $Kn = \lambda/R$, где λ – средняя длина свободного пробега молекул газа, R – характерный размер частицы. Частицы называют крупными, если $Kn \leq 0,01$ и умеренно крупными при $0,01 \leq Kn \leq 0,3$.

Задача решается в сферической системе координат r, θ, φ ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), начало которой совпадает с центром масс капли. Полярную ось направим вдоль градиента относительной концентрации молекул первого компонента $\nabla C_{1\infty}$ (ось Oz направлена горизонтально). При указанном выборе начала системы координат каплю можно считать покоящейся, а бинарную смесь – движущейся с постоянной скоростью U_∞ относительно центра капли. Таким образом, наша задача сводится к анализу обтекания слабо испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком, скорость которого U_∞ подлежит определению. Определенная в такой системе координат скорость газа на бесконечности равна с обратным знаком величине скорости диффузии–и фотофореза капли. Индексы "e" и "i" здесь и далее будем относить к газу и капле, индексом "s" – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности капли равной T_{iS} , а индексом " ∞ " – обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду в отсутствии внешнего градиента концентрации $\nabla C_{1\infty}$.

Распределения скорости U_e , давления P_e , температур T_e, T_i и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси C_1 должны быть симметричны относительно оси, проходящей через центр, т.е. зависят только от радиальной координаты r и полярного угла θ . При теоретическом описании диффузии–и фотофореза будем предполагать, что в силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процессы тепло–и массопереноса в системе капля–газ протекают квазистационарно; времена релаксации малы по сравнению с характерным временем переноса капли; капля при своем движении сохраняет сферическую форму. Это справедливо, если выполняется условие $\sigma/R \gg \mu_e U/R$ – силы внешнего давления малы по сравнению с давлением, вызванным межфазным (жидкость–газ) поверхностным натяжением. Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела капля–бинарная газовая смесь; U – абсолютная величина скорости газовой смеси относительно капли. Капля образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом. Движение частицы происходит при числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы и при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности, т.е. когда $(T_e - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) можно считать постоянными, а бинарный газ рассматривать как несжимаемую среду.

Если $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim 0(1)$, то при решении уравнений газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В этом случае газообразная среда считается неизоэнтальной и система газодинамических уравнений, описывающая такую среду ставится существенно нелинейной. В научной литературе имеется мало работ, посвященных исследованию движения частиц при значительных относительных перепадах температуры в газообразных средах, в частности рассматривались, например, гравитационное движение нагретых частиц [Малай, 2008;

Малай, 2011], фотофорез нагретых крупных частиц [Малай, 2012], термофорез крупных нагретых частиц [Малай, 2016]. В этих работах показано, что нагрев поверхности частиц существенно влияет на их движение.

В рамках сформулированных выше допущений распределения массовых скоростей U_e и U_i , давлений P_e и P_i , температур T_e, T_i и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси C_1 описываются следующей системой уравнений [Ландау, 1988; Хаппель, 1976]:

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e, \operatorname{div} U_e = 0, \tag{1.1}$$

$$\mu_i \Delta U_i = \nabla P_i, \operatorname{div} U_i = 0, \tag{1.2}$$

$$\rho_e c_{pe} (U_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, (U_e \nabla) C_1 = D_{12} \Delta C_1, \tag{1.3}$$

$$\rho_i c_{pi} (U_i \nabla) T_i = \lambda_i \Delta T_i + q_i, \tag{1.4}$$

которая решалась со следующими граничными условиями, записанные в сферической системе координат

$$r = R, \quad U_r^{(e)} = U_r^{(i)} = 0, \quad U_\theta^{(e)} - U_\theta^{(i)} = K_{TS} \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta},$$

$$T_e = T_i, \quad -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} - \sigma_0 \sigma_1 (T_i^4 - T_{e\infty}^4), \quad \frac{\partial C_1}{\partial r} = 0, \tag{1.5}$$

$$\mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \frac{\partial T_i}{\partial \theta} = \mu_i \left(\frac{\partial U_\theta^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(i)}}{r} \right),$$

$$r \rightarrow \infty, \quad U_r^{(e)} = U_\infty \cos \theta, U_\theta^{(e)} = -U_\infty \sin \theta, P_e = P_\infty,$$

$$T_e = T_{e\infty}, C_1 = C_{1\infty} + |\nabla C_{1\infty}| r \cos \theta \tag{1.6}$$

$$r \rightarrow 0, \quad T_i \neq \infty, P_i \neq \infty, U_i \neq \infty. \tag{1.7}$$

Здесь U_r, U_θ – радиальная и касательная компоненты массовой скорости; σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, ν_e – коэффициент кинематической вязкости; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; σ_1 – интегральная степень черноты вещества капли; D_{12} – коэффициент взаимной диффузии; λ_e, λ_i – коэффициенты теплопроводности газообразной среды и капли; U_∞ – величина скорости набегающего потока.

В граничных условиях на поверхности частицы (1.5) учтены условия непроницаемости для нормальной компоненты и тепловое и диффузионное скольжения для касательных компонент массовой скорости; равенства температур и радиальных потоков тепла с учетом излучения и непрерывность касательных компонент тензора напряжений с учетом зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Выражения для газокинетических коэффициентов K_{TS}, K_{DS} получены в ходе решения уравнения Больцмана [Поддоскин, 1982]. При коэффициентах аккомодации тангенциальной проекции импульса и энергии газовых молекул равных единице, значения газокинетических коэффициентов равны [Поддоскин, 1982] $K_{TS} \approx 1,161, K_{DS} \approx 0,3$.

На большом расстоянии от частицы ($y \rightarrow \infty$) справедливы граничные условия (1.6), а конечность физических величин, характеризующих частицу при $y \rightarrow 0$ учтено в (1.7).



Обезразмерим уравнения и граничные условия, введя безразмерную координату, скорость и температуру следующим образом: $y_k = x_k / R$, $V = U / U_\infty$, $t = T / T_{e\infty}$. Здесь в качестве единицы измерения расстояния выбран радиус капли R , температура $T_{e\infty}$ и скорость U_∞ . Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные $\rho_e, \mu_e, \lambda_e, c_{pe}$ и сохраняющиеся в процессе движения капли $R, T_{e\infty}, |\nabla C_{1\infty}|$ и U_∞ . Из этих параметров можно составить три безразмерные комбинации: числа Рейнольдса ($Re = \rho_e R U_\infty / \mu_e$), число Пекле ($Pe = \rho_e c_{pe} R U_\infty / \lambda_e = Re \cdot Pr$, $Pr = c_{pe} \mu_e / \lambda_e$) и малый безразмерный параметр $\varepsilon = R |\nabla C_{1\infty}|$.

Заметим, что при описании диффузиофореза $\varepsilon = R |\nabla C_{1\infty}|$ играет роль малого параметра [Яламов, 1972], а при описании фотофореза роль малого параметра играет число Рейнольдса [Яламов, 1985, с. 62]. Действительно, скорость частицы в поле градиента относительной концентрации первого компонента по порядку величины равна

$$|U_{dh}| \sim \left| D_{12} \left| \frac{\Delta C_1}{L} \right| \right| \sim \frac{D_{12}}{R} \varepsilon \quad [\text{Яламов, 1972}]. \quad \text{Здесь } \frac{\Delta C_1}{L} - \text{средний градиент относительной}$$

концентрации вдали от частицы. Этот градиент равен отношению перепада концентрации ΔC_1 на конечном отрезке L . Скорость диффузиофореза равна с обратным знаком скорости центра инерции газовой среды на большом расстоянии от частицы, поэтому

$$\text{число Рейнольдса построенное по характерной скорости равно } Re = \frac{|U_{dh}| R}{D_{12}} \sim \varepsilon.$$

Скорость фотофореза равна с обратным знаком скорости центра инерции газовой среды на большом расстоянии от частицы. Поэтому фотофоретическая скорость частицы по

$$\text{порядку величины равна } |U_{ph}| \sim \left| \frac{v_e}{\lambda_i R^3 T_{e\infty} V} \int q_i z dV \right| \quad [\text{Preining, 1966}], \quad \text{где } \int q_i z dV -$$

дипольный момент плотности тепловых источников q_i , неоднородно распределенных в объеме частицы. Тогда число Рейнольдса, построенное по этой характерной скорости

$$\text{равна } Re = \frac{|U_{ph}| R \rho_e}{\mu_e} = \varepsilon. \quad \text{Здесь } \varepsilon = \frac{1}{\lambda_i R^2 T_{e\infty} V} \int q_i z dV. \quad \text{Таким образом, для фотофореза}$$

роль малого параметра играет число Рейнольдса, а для диффузиофореза – ε .

При нахождении диффузио- и фотофоретической силы и скорости ограничимся поправками первого порядка малости по ε .

Вид граничных условий указывает на то, что выражения для компонент массовой скорости U_r и U_θ ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [Хаппель, 1976]. Известно [Хаппель, 1976], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений. Компоненты массовой скорости будем искать в виде:

$$U_r(y, \theta) = \cos \theta G(y), \quad U_\theta(y, \theta) = -\sin \theta g(y). \quad (1.8)$$

Здесь $G(y)$ и $g(y)$ – произвольные функции, зависящие от координаты $y = r/R$.

В обезразмеренном виде уравнения тепло- и массопереноса принимают следующий вид:

$$\varepsilon Pr (V_e \nabla) t_e = \Delta t_e, \quad \varepsilon (V_e \nabla) C_1 = \Delta C_1, \quad (1.9)$$

$$\varepsilon \beta_0 (V_i \nabla) t_i = \Delta t_i + \beta_3 q_i. \quad (1.10)$$

Здесь $\beta_1 = \frac{\mu_e}{D_{12}\rho_e}$, $\beta_0 = \frac{\rho_i c_{pi} \mu_e}{\lambda_i \rho_e}$, $\beta_3 = \frac{R^2}{\lambda_i T_{e\infty}}$.

2. Распределения температуры, концентрации и скорости в окрестности слабо испаряющейся капли. Анализ полученных результатов

Решение уравнений гидродинамики (1.1)–(1.2) ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [Хаппель, 1976]. Известно [Хаппель, 1976], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений. С учетом этого и выражений (1.8), общие выражения для компонент массовой скорости и давления имеют вид [Хаппель, 1976]:

$$P(y, \theta) = P_0 + \frac{\mu}{R} \cos\theta \left(\frac{A_2}{y^2} + 10yA_4 \right), \tag{2.1}$$

$$U_r(y, \theta) = \cos\theta \left(\frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} + A_3 + A_4 y^2 \right), U_\theta(y, \theta) = -\sin\theta \left(-\frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} + A_3 + 2A_4 y^2 \right). \tag{2.2}$$

Здесь μ – динамическая вязкость (газ, жидкость), постоянные интегрирования A_1, A_2, A_3, A_4, P_0 определяются из граничных условий, $y = r/R$.

Удобно рассматривать диффузию–и фотофорез в системе координат в мгновенном положении центра масс частицы. В этом случае газ на бесконечности покоится, а сама частица движется с характерной скоростью $U = -U_\infty$. С учетом этого, выражения для обезразмеренных компонент массовой имеют вид:

$$V_r^{(e)}(y, \theta) = \cos\theta \left(\frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right), V_\theta^{(e)}(y, \theta) = -\sin\theta \left(-\frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right), \tag{2.3}$$

$$V_r^{(i)}(y, \theta) = \cos\theta (A_3 + A_4 y^2), V_\theta^{(i)}(y, \theta) = -\sin\theta (A_3 + 2A_4 y^2), \tag{2.4}$$

С учетом выражений (2.3)–(2.4), решая уравнения (1.9)–(1.10) методом разделения переменных, получаем следующие выражения для t_e, t_i и C_1 ($t_k = T_k/T_{e\infty}, k = e, i$), удовлетворяющие граничным условиям (1.6)–(1.7)

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), C_1(y, \theta) = C_{1\infty}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta), \tag{2.3}$$

где $t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}$, $t_{i0}(y) = B_0 + \frac{C_0}{y} - \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy$, $\omega_0 = \text{Pr} \Gamma_0$, $C_0 = \frac{1}{4\pi R \lambda_i T_{e\infty}} \int q_i dV$,

$$t_{e1}(y, \theta) = \cos\theta \left[\frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{A_2}{y} - \frac{A_1}{2y^3} \right) \right], \psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) dx, \Omega_0(y) = \int_0^y \psi_0 dy,$$

$$C_1 = \frac{1}{3} \left[\int_1^0 y \psi_1 dy + \beta_0 \int_1^0 (A_3 y + A_4 y^3) \Omega_0 dy \right], \int_1^0 y \psi_1 dy = \frac{3}{4\pi R^2 \lambda_i T_{e\infty}} \int q_i z dV, x = \cos\theta,$$

$$t_{i1}(y, \theta) = \cos\theta \left[B_1 y + \frac{C_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left(y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy - \frac{\beta_0}{y^2} \int_1^y (A_3 y + A_4 y^3) \Omega_0 dy + \right. \right.$$

$$\left. + \beta_0 y \int_1^y \left(\frac{A_3}{y} + A_4 \right) \Omega_0 dy \right], \psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) x dx, C_{11}(y, \theta) = \cos\theta \left(y + \frac{1}{2y^2} \right),$$

$z = r \cos \theta, dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr,$ $\int_V q_i z dV$ – дипольный момент плотности тепловых источников [Малай, 2012], Pr – число Прандтля [Ландау, 1988].

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур определяются из граничных условий на поверхности частицы. В частности для коэффициентов Γ_0, Γ_1 имеем:

$$\Gamma = \frac{3}{4\pi R^2 \lambda_{iS} \delta T_{\infty}} \int_V q_i z dV + \frac{\beta_0}{\delta} \int_1^0 (A_3 y + A_4 y^3) \Omega_0 dy - \frac{\omega_0}{2\delta} \left[A_2 \left(\frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1 \right) - \frac{A_1}{2} \left(3 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1 \right) \right],$$

$$\Gamma_0 = t_{eS} - 1, \quad (2.4)$$

Здесь $\delta = 2 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_1, \omega_1 = 1 + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{iS}} T_{\infty}^3 t_{eS}^3, t_{iS} = t_{i0}(y=1), t_{eS} = t_{e0}(y=1).$

Среднее значение температуры поверхности слабо испаряющейся капли T_{iS} определяется из решения следующей системы уравнений, в которой $T_{iS} = t_{iS} T_{\infty}, T_{eS} = t_{eS} T_{\infty}$

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{iS} \\ t_{eS} - 1 = \frac{1}{4\pi R \lambda_{eS} T_{\infty}} \int_V q_i dV - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{\infty}^3}{\lambda_{eS}} (t_{iS}^4 - 1) \end{cases} \quad (2.5)$$

где $\lambda_{iS} = \lambda_i(T_{iS}), \lambda_{eS} = \lambda_e(T_{eS}).$

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и имеет вид [Ландау, 1988]:

$$F_z = \int_{(s)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \Big|_{r=R}. \quad (2.6)$$

Здесь $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, U_r^e$ и U_{θ}^e – компоненты тензора напряжений, радиальная и касательная

компоненты массовой скорости, $\sigma_{rr} = \mu_e \left(2 \frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div} U_e \right), \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_{\theta}^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_{\theta}^e}{y} \right).$

Подставляя полученные выше выражения в (2.6), после интегрирования получаем, что общая сила, действующая на частицу, складывается из силы вязкого сопротивления среды F_{μ} , диффузионной силы F_{Dh} , фотофоретической силы F_{ph} , сил $F_{mh}^{(1)}$ и $F_{mh}^{(2)}$, обусловленных движением среды (т.е. учета конвективного члена в уравнениях теплопроводности вне и внутри слабо испаряющейся капли):

$$F = F_{\mu} + F_{Dh} + F_{ph} + F_{mh}^{(1)} + F_{mh}^{(2)}, \quad (2.7)$$

где $F_{\mu} = -6\pi R \mu_{eS} f_{\mu} U \mathbf{n}_z, F_{Dh} = -6\pi R \mu_{eS} f_{Dh} |\nabla C_{1\infty}| \mathbf{n}_z,$

$$F_{ph} = -6\pi R \mu_{eS} f_{ph} \int_V q_i z dV \mathbf{n}_z, \quad F_{mh}^{(1)} = -6\pi R \mu_{eS} f_{mh}^{(1)} \omega_0 \mathbf{n}_z, \quad F_{mh}^{(2)} = -6\pi R \mu_{eS} f_{mh}^{(2)} \beta_0 \mathbf{n}_z.$$

(2.8)

Значения коэффициентов $f_{\mu}, f_{Dh}, f_{ph}, f_{mh}^{(1)}$ и $f_{mh}^{(2)}$ могут быть оценены из следующих выражений:

$$f_{\mu} = \frac{1 + \frac{2\mu_{eS}}{3\mu_{eS}}}{1 + \frac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}}, \quad f_{Dh} = K_{DS} \frac{D_{12}^{(s)}}{1 + \frac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}},$$

$$f_{ph} = \frac{1}{2\pi R^3 \lambda_{iS}} \frac{1}{\delta T_{e\infty} \left(1 + \frac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)} \left(K_{TS} \frac{v_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right), \quad (2.9)$$

$$f_{mh}^{(1)} = -\frac{1}{6R} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \frac{1}{\delta \left(1 + \frac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)} \left(K_{TS} \frac{v_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right) \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1 + \frac{2\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}}{1 + \frac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}} \right),$$

$$f_{mh}^{(2)} = \frac{1}{\delta R \left(1 + \frac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}\right)} \left(K_{TS} \frac{v_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right) \left(1 - \frac{1 + \frac{2\mu_{eS}}{3\mu_{iS}}}{1 + \frac{\mu_{eS}}{\mu_{iS}}} \right) \Omega_1, \quad \Omega_1 = \int_0^1 (y^3 - y) \Omega_0 dy,$$

$$\omega_0 = \text{Pr} \Gamma_0, \quad \Omega_0(y) = \int_0^y \psi_0 dy, \quad \beta_0 = \frac{\rho_i c_{pi} \mu_{eS}}{\lambda_{iS} \rho_e}, \quad \mathbf{n}_z - \text{единичный вектор в направлении оси}$$

Oz .

Приравнивая полную силу к нулю (капля движется равномерно), получаем общее выражение для скорости упорядоченного движения слабо испаряющейся капли, которая будет складываться из диффузиофоретической, фотофоретической скоростей и скоростей, обусловленных движением среды (т.е. учета конвективного члена в уравнениях теплопроводности вне и внутри слабо испаряющейся капли):

$$\mathbf{U}_p = - \left(h_{Dh} |\nabla C_{1\infty}| + h_{ph} \int_V q_i z dV + h_{mh}^{(1)} \omega_0 + h_{mh}^{(2)} \beta_0 \right) \mathbf{n}_z, \quad (2.10)$$

Здесь $h_{Dh} = \frac{f_{Dh}}{f_{\mu}}$, $h_{ph} = \frac{f_{ph}}{f_{\mu}}$, $h_{mh}^{(1)} = \frac{f_{mh}^{(1)}}{f_{\mu}}$, $h_{mh}^{(2)} = \frac{f_{mh}^{(2)}}{f_{\mu}}$.

Полученные выше формулы (2.7), (2.10) позволяют оценивать влияние движения среды и нагрева поверхности частицы на величину силы и скорости слабо испаряющейся капли.

Из формул (2.7), (2.10) видно, что вклад движения среды пропорционален коэффициентам $\omega_0 = \text{Pr} \Gamma_0$ и β_0 , соответственно. Причем их вклады в общую силу и в скорость упорядоченного движения слабо испаряющейся капли разные по знаку: первый вклад отрицательный, а второй – положительный. Учитывая, что для большинства газов число Прандтля порядка единицы, то вклад пропорциональный коэффициенту ω_0 определяется значением коэффициента $\Gamma_0 = t_{eS} - 1$. Коэффициент Γ_0 определяется из решения системы уравнений (2.5). Для решения этой системы уравнений необходимо задать явный вид распределения плотности тепловых источников внутри частицы. Таким образом, на величину силы и скорости слабо испаряющейся капли движение среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности) оказывает вклад нагрев поверхности частицы. Это позволяет использовать полученные формулы при разработке методов



тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц и т.д. Вклад в силу и скорость упорядоченного движения слабо испаряющейся капли от коэффициента β_0 (учитывающего внутренние течения в капле) зависит от

значения коэффициента $\Omega_0(y) = \int_0^y \psi_0 dy$ ($\psi_0 = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_{\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) dx$). Чтобы оценить его

вклад необходимо конкретизировать природу и плотность тепловых источников. В случае электромагнитного нагрева поверхности капли, степень неоднородности распределения энергии излучения в частице зависит от оптических констант материала частицы (m_s) и параметра дифракции (x_a). В этом случае выражение для плотности излучения в частице,

трансформируемой в тепло, можно записать в виде $q_i = 4\pi \frac{n_s a_s}{n_0 \lambda_0} I_0 B_s$, где $m_s = n_s + ia_s$,

$x_a = 2\pi R/\lambda_0$, n_s – показатель преломления, a_s – показатель поглощения, n_0 – показатель преломления среды, I_0, λ_0 – интенсивность и длина волны излучения, B_s – функция координат, рассчитываемая по теории Ми [Береснев, 2003; Борен, 1986].

Для оценки вклада движения среды рассмотрим наиболее простой случай, когда частица поглощает излучение как черное тело. В этом случае поглощение происходит в тонком слое толщиной $\delta R \ll R$, прилегающем к нагреваемой части поверхности частицы. При этом плотность тепловых источников внутри слоя толщиной δR определяется с помощью формулы [Малай, 2012]

$$q_i = \begin{cases} -\frac{I_0}{\delta R} \cos \theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, R - \delta R \leq r \leq R \\ 0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

где I_0 – интенсивность падающего излучения. С учетом этого имеем следующее выражение

$$\frac{1}{4\pi R \lambda_i T_{\infty}} \int_V q_i dV = \pi R^2 I_0. \quad (2.11)$$

В этом случае среднее значение температуры поверхности частицы T_{is} определяется из решения следующей системы уравнений ($T_{is} = t_{is} T_{\infty}$, $T_{es} = t_{es} T_{\infty}$)

$$\begin{cases} t_{es} = t_{is} \\ t_{es} = 1 + \frac{R}{4\lambda_e T_{\infty}} I_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{\infty}^3}{\lambda_e} [t_{is}^4 - 1], \end{cases} \quad (2.12)$$

Из формул видно, что величина и направление силы и скорости фотофореза крупной слабо испаряющейся капли определяется величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников $\int_V q_i z dV$. В тех случаях, когда дипольный

момент отрицательный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к потоку излучения), частица движется в направлении падающего излучения. Если дипольный момент положительный (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы), частица будет двигаться навстречу направлению распространения излучения. Плотность тепловых источников при увеличении интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. Отсюда

следует, что фотофоретическая сила и скорость с увеличением интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. При постоянной величине дипольного момента, увеличение радиуса R частицы приводит к уменьшению фотофоретической силы и скорости обратно пропорционально R^3 . Фотофоретическая сила и скорость существенно зависят и от теплопроводности вещества частицы. При $\lambda_{iS} \rightarrow \infty$ (высоко теплопроводные частицы) сила и скорость фотофореза, при фиксированной величине дипольного момента, стремятся к нулю. Для абсолютно черного тела $\int_V q_i z dV = -\frac{2}{3} \pi R^3 I_0$.

Вклад в силу и скорость упорядоченного движения слабо испаряющейся капли, как видно из формул (2.9) оказывает зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Для большинства жидкостей величина $\frac{\partial \sigma}{\partial t_i} < 0$, т.е. поверхностное натяжение жидкости, уменьшается с температурой, а коэффициент K_{TS} имеет положительное значение. Как видно из формул (2.9) в выражения, кроме диффузиофореза, входит множитель $\left(K_{TS} \frac{v_{eS}}{t_{eS}} + \frac{R}{3\mu_{iS}} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} \right)$. Это означает, что в случае крупных частиц существует некоторый критический радиус, при котором капля будет двигаться только за счет диффузиофоретической силы.

Полученные выражения для силы и скорости диффузиофореза слабо испаряющейся капли указывают на то, что движение среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности) не оказывают влияние на диффузиофорез. Аналогичный результат имеет место и для крупной нелетучей частицы сферической формы [Яламов, 1972].

При $\omega_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ мы получаем выражения для чистого диффузиофоретического и фотофоретического движения крупной слабо испаряющейся капли [Яламов, 1972], а при $\mu_{iS} \rightarrow \infty$ и $\sigma \rightarrow 0$ полученные формулы переходят в соответствующие выражения для диффузиофореза и фотофореза крупной твердой частицы сферической формы [Яламов, 1972; Кутуков, 1976; Малай, 2006].

Заключение

В квазистационарном приближении при числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы решена задача о влиянии движения среды (учет конвективных членов в уравнениях диффузии и теплопроводности) на диффузио-и фотофорез крупной слабо испаряющейся капли сферической формы, внутри которой действуют тепловые источники в бинарной вязкой газообразной среде. Получены аналитические формулы для силы и скорости упорядоченного движения капли, в которых учтены тепловое и диффузионное скольжения, зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры, внутренние течения. Проведенные качественные оценки показали, что движение среды не влияет на диффузиофорез.

Список литературы References

1. Береснев С.А., Кочнева Л.Б., Суетин П.Е. 2003. Фотофорез аэрозолей в атмосфере Земли. Теплофизика и аэромеханика. № 2: 297–311
Beresnev S. A., Kochneva L. B., Suetin P. E. 2003. Photophoresis of aerosols in the earth's atmosphere. Thermophysics and Aeromechanics. No. 2. : 297-311
2. Борен К., Хафмен Д. 1986. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир, 660 с.



- Boren K., Huffman D. 1986. Absorption and scattering of light by small particles. M., Mir, 660 p.
- Boren K., Huffman D. Absorption and scattering of light by small particles. M., Mir, 660 p.
3. Кутуков В.Б., Шукин Е.Р. 1976. О фотофоретическом движении крупной аэрозольной частицы в поле оптического излучения. Журнал технической физики. Т.46(3): 626–627
- Kutukov V. E., Shchukin 1976. On the photophoretic motion of a large Aero-ash particle in the optical radiation field. Journal of technical physics. Vol. 46 (3): 626-627
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. 1988. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. М., Наука. 736 с.
- Landau L. D., Lifshitz E. M. 1988. Theoretical physics. Vol.6. Hydrodynamics. M., Science. 736 p.
5. Малай Н.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. 2008. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде. Прикладная механика и техническая физика. Т. 81 (5): 74–80.
- Malai N.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A., Ryazanov, K.S. 2008. Gravitational motion of a uniformly heated solid particle in a gaseous medium. Applied mechanics and technical physics. Vol. 81 (5): 74-80.
6. Малай Н.В., Рязанов К.С., Шукин Е.Р., Стукалов А.А. 2011. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущейся в газообразной среде. Прикладная механика и техническая физика. Т. 52(4): 63–71
- Malay N.V., Ryazanov, K.S., Shchukin, E. R., Stukalov, 2011. On the force acting on a heated spherical drop moving in a gaseous medium. Applied mechanics and technical physics. Vol. 52 (4): 63-71.
7. Малай Н.В., Лиманская А.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А. 2012. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы. Журнал технической физики. Т. 82(10): 42–49
- Malay N.V., Limanskaya A.V., Shchukin, E. R., Stukalov, A.D. 2012. Photophoresis of heated large spherical aerosol particles. Journal of technical physics. Vol. 82 (10): 42-49
8. Малай Н.В., Лиманская А.В., Шукин Е.Р. 2016. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы. Прикладная механика и техническая физика. Т. 57(2): 164–171
- Malay N.V., Limanskaya A.R., Shchukin E., 2016. Thermophoretic motion of heated large spherical aerosol particles. Applied mechanics and technical physics. Vol. 57 (2): 164-171
9. Малай Н.В., Шукин Е.Р., Плесканев А.А., Стукалов А.А. 2006. Особенности фотофоретического движения умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы. Оптика атмосферы и океана. Т.19(5): 413-418
- Malay N.V., Shchukin E.R., Pleskanev A., Stukalov A., 2006. Features of photophoretic motion of moderately large spherical aerosol particles. Optics of the atmosphere and ocean. Vol. 19 (5): 413-418
10. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. 1982. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц. Журнал технической физики. Т.52(11): 2253–2661
- Poddockin A.B., Yushkanov A.A., Yalamov, Y.I. 1982. Theory of thermophoresis of moderately large aerosol particles. Journal of technical physics. Vol. 52 (11): 2253-2661
11. Хаппель Дж., Бреннер Г. 1976. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир. 630 с.
- Happel J., Brenner G. 1976. Hydrodynamics at low Reynolds numbers. M., Mir. 630 p.
12. Яламов Ю.И., Галоян В.С. 1985. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван., Луйс, 205 с.
- Yalamov Y.I., Galoyan V.S. 1985. Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media. Yerevan., Luys, 205 p.
13. Яламов Ю.И., Обухов Б.А. 1972. К теории диффузиофореза крупных нелетучих аэрозольных частиц. Журнал технической физики. XLII(5): 1064–1068
- Yalamov, Y.I., Obukhov A.B. 1972. The theory of diffusiophoresis of large aerosol particles non-volatile. Journal of technical physics. XLII(5): 1064-1068
14. Preining O. 1966. Photophoresis. Aerosol Science. Ed. by C.N. Davies. London: Academic Press. : 111–153
- Preining O. 1966. Photophoresis. Aerosol Science. Ed. by C.N. Davies. London: Academic Press. : 111–153

УДК 535.3

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-115-120

OPTICAL FORCE NEAR THE LASER ILLUMINATED TAPERED TIP**ОПТИЧЕСКАЯ СИЛА ВБЛИЗИ ЛАЗЕРНОЙ ПОДСВЕТКИ
КОНИЧЕСКОГО НАКОНЕЧНИКА****M.R. Mohebbifar**
М.Р. Мохебби ФарDepartment of Physics, Faculty of Science, Malayer University,
Malayer, Iran, 6571995863, Malayer-Arak Highway 4kmКафедра Физики, Факультет Науки, Университет Малайера,
Малайер, Иран, 6571995863, Малайер-Арак шоссе 4км

E-mail: mmohebbifar@gmail.com

Abstract

Optical near-fields are localized to the source region of optical radiation or to the surfaces of materials interacting with free radiation. Due to the high field gradients of evanescent waves, strong forces are predicted in optical near-fields. In this paper, by solving Maxwell's equations with Finite difference Time Domain (FDTD) simulation based on the numerical software, the effect of changing the period of grating on the optical force around tapered tip with 90 degree laser beam incident angle was studied. The optimization results show that optimum value for period of circular gratings in order to achieve maximum optical force enhancement 208 nm was obtained. This maximum optical force is $1.4 \times 10^{-14} \frac{N}{W}$ and occurs when laser wavelength is 655 nm.

Аннотация

Оптические ближние поля локализируются в области источника оптического излучения или на поверхностях материалов, взаимодействующих со свободным излучением. Из-за высоких градиентов поля затухающих волн сильные силы предсказываются в оптических ближних полях. В данной работе, решая уравнения Максвелла с помощью метода конечных разностей во временной области (FDTD) на основе числового программного обеспечения, изучалось влияние изменения периода решетки на оптическую силу вокруг конического наконечника с углом падения лазерного луча 90 градусов. Результаты оптимизации показывают, что было получено оптимальное значение для периода круглых решеток для достижения максимального увеличения оптической силы 208 нм. Эта максимальная оптическая сила составляет $1.4 \times 10^{-14} \frac{Н}{В}$ и возникает, когда длина волны лазера составляет 655 нм.

Keywords: Optical antenna, Surface Plasmon, Optical force, Tapered tip, Finite difference Time Domain (FDTD).**Ключевые слова:** оптическая антенна, поверхностный плазмон, оптическая сила, наконечник конуса, метод конечных разностей во временной области (FDTD).

Introduction

In many situations, optical near-fields are explored for their ability to localize optical energy to longitudinal scales smaller than the roughly diffraction limit of half-wavelength of incident light. Discrete momentum transfer between photons and electrons was shown experimentally by Compton in 1923. It results in a decrease in energy (increase in wavelength) of the photon (which may be an X-ray or gamma ray photon), called the Compton Effect. Part of the energy of the photon is transferred to the recoiling electron. Inverse Compton scattering occurs when a charged particle transfers part of its energy to a photon. Also the recoil momentum transferred from photons to atoms was observed by Frisch in 1933 [Frisch, 1993].

The mechanical force in laser trapping and cooling experiments can be understood on a semi classical basis where the electromagnetic field is treated classically and the particle being trapped as a quantized two-level system [Shimizu & Sasada, 1998]. In the semi-classical approach atoms are classical and the photons are quantum studied [Mohebbifar et al., 2015]. However, the quantum theory of photons is used to interpret the results correctly [Stenholm, 1986]. Furthermore, according to the photon concept, there are quanta of energy and momentum transfer between the radiation field and the atom. In order to derive the conservation law for linear momentum in an optical field classical electrodynamics was used. In the small object limit, a familiar expression was obtained for gradient and scattering forces. It is possible to derive the forces exerting on atoms and molecules in optical traps. This theory is applied to calculate the trapping forces near a laser illuminated metal tip. The net force exerted on an arbitrary object is determined by Maxwell's stress tensor [Novotny et al., 1998; Larsen, Metiu, 2001; Martin et al., 2001; Krug et al. 2002; Novotny, Hecht, 2006; Novotny et al., 2009; Kharintsev et al., 2013; Zohrabi, Mohebbifar, 2015; Kharintsev et al., 2017].

Field enhancement near metallic nanoparticles structures plays a major role in optical phenomena such as second harmonic generation (SHG) surface enhanced Raman scattering and near-field microscopy. The enhancement originates from the combination of the electrostatic lightning-rod effect, due to the geometric singularity of sharply pointed structures, and localized Surface plasmon resonance (SPR) which depends sensitively on the excitation wavelength. Indeed Surface plasmon resonance is the resonant oscillation of conduction electrons at the interface between negative and positive permittivity material stimulated by incident light. SPR is the basis of many standard tools for measuring adsorption of material onto planar metal (typically gold or silver) surfaces or onto the surface of metal nanoparticles. On the other hand Strong evanescent waves are excited preferentially (although not exclusively) at the boundary of two different media, for example by total internal reflection (TIR), light interaction with sub-wavelength period gratings or small micro/nano-objects (particles, tips, apertures, etc.) whose sizes are comparable to the incident wavelength. Evanescent waves are undamped electromagnetic modes at two dielectric media interfaces. Unlike dielectrics, the free electron gas of metals can sustain surface and volume charge density oscillations (i.e. plasmonic resonance wave, leading to the absorption and scattering of laser light in an unusual way compared to dielectrics [Wang et al., 2004]). The plasmonic waves are damping electromagnetic modes due to the high dissipative factor of metals and can only propagate a limited short distance (typically several tens of micrometers) along the surface. Despite the slightly different physical natures of evanescent waves and plasmonic waves, both waves are near-field limited and are able to confine light into a subdiffraction-limited spot, which is important for laser nanofabrication [Wang et al., 2009].

In this study, at first effect of changing the period of grating on the field enhancement around tip apex was studied by solving Maxwell's equations with Finite difference Time Domain (FDTD) simulation numerical software. Then optical force near a laser-illuminated tapered Tip was studied and optimum value of circular gratings in order to achieve maximum output electric field intensity and maximum optical force enhancement were obtained.

Method and simulation results

The Finite-Difference Time-Domain method (FDTD) is today’s one of the most popular technique for the solution of the Maxwell’s equations with complex geometries [Taflove, Hagness, 2000; Galarreta et al., 2011]. It has been successfully applied to an extremely wide variety of problems, such as scattering from metal objects and dielectrics, antennas, micro strip circuits, and electromagnetic absorption in the human body exposed to radiation. The main reason of the success of the FDTD method resides in the fact that the method itself is extremely simple, even for programming a three dimensional code. The technique was first proposed by K. Yee, and then improved by others in the early 70s.

In FDTD, the electromagnetic field and structural materials of interest are described on a discrete mesh composed of so-called Yee cells. Maxwell’s equations are solved discretely in time, where the time step used is related to the mesh size through the stability criterion. The Lumerical software, based on the FDTD method, is utilized. The FDTD approach has rapidly become to one of the most important computational methods in Electromagnetics since Yee proposed it in 1966 [Novotny, 2008]. In other words FDTD (finite-difference time-domain) approach is one of the most commonly used techniques for solving the complex Maxwell’s equation [Elsherbeni et al., 2003; Mulyanti et al., 2018; Sadeghi, Hamidi, 2018]. The commercial software has been developed based on FDTD approach such as XFDTD software, SEMCAD software and Lumerical software. Lumerical has been at the forefront of developing powerful simulation technology for photonic designers which was released in 2003 in two sections FDTD solutions and MODE solutions. In fact Lumerical develops photonic simulation software – tools which enable product designers to understand light, and predict how it behaves within complex structures, circuits, and systems. These tools allow scientists and engineers to exploit recent advances to photonic science and material processing to develop high impact technologies across exciting fields including augmented reality, digital imaging, solar energy, and quantum computing. FDTD can easily handle a variety of geometric shapes consisting of various types of materials, including dielectric, magnetic, frequency-dependent, nonlinear, and anisotropic materials. Features in electromagnetic computational technique of FDTD are very attractive to solve various applications, such as microwave devices, antennas, radar cross section, wave propagation, waveguide, and optical devices.

To generate a strong field enhancement at the tip, the electric field of the exciting laser beam needs to be polarized along the tip axis. The influence of tip shape and material on the field enhancement has been discussed in a series of publications with the aim of discovering the optimum tip [Martin et al., 2001; Gerton et al., 2004]. The electric field around the optical antenna is calculated and simulated based on Maxwell’s equations (Eq. 1 and 2).

$$E(r) = E_0 + i\omega\mu\mu_0 \int_V \bar{G}(r, r')j(r') dV' \quad (1)$$

$$H(r) = H_0 + \int_V \{\nabla \times \bar{G}(r, r')\}j(r') dV' \quad (2)$$

Where E_0 is the initial electric field of the plane wave laser, H_0 initial Hamiltonian, ω Angular frequency of incident field and \bar{G} is the dyadic Green’s function. The enhanced field at the tip results from an increase in the surface charge density. The incident laser beam drives the free electrons in the metal along the direction of polarization. While the charge density is zero inside the metal at any instant of time ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$), charges accumulate on the metal surface. When the incidence polarization is perpendicular to the tip axis, completely opposed points on the tip surface have opposite charges. As a consequence, the foremost end of the tip remains unchanged. On the other hand, when the incidence polarization is parallel to the tip axis the induced surface charge density is rotationally symmetric and has the highest amplitude at the tip apex. The enhanced field is confined to the tip apex in all three dimensions. Thus the illuminated tip represents a Nano-scale light source.

Here the effect of changing the antenna geometry on the field enhancement and then on the optical force enhancement was studied. A golden tip with a 30° Cone angle, a 10 nm radius of apex, 1200 nm distance of the last circular grating from tip apex, 30 nm depth of etched grating and some proposed period of grating were considered. A plane wave of laser beam was considered in the visible spectral range. For mentioned geometry of golden tip and three period of grating 200, 250 and 300 nm enhancement of electric field was simulated and then light intensity as the square of electric field was calculated and illustrated in figures 1(a), 1(b) and 1(c) respectively. These results confirm that there are significant changes in the distribution of intensity in the x-y plane around apex by changing the period of grating. The optimization results show that the highest light intensity near tip occurs for period of grating 208 nm and these results presented in figure 1(d).

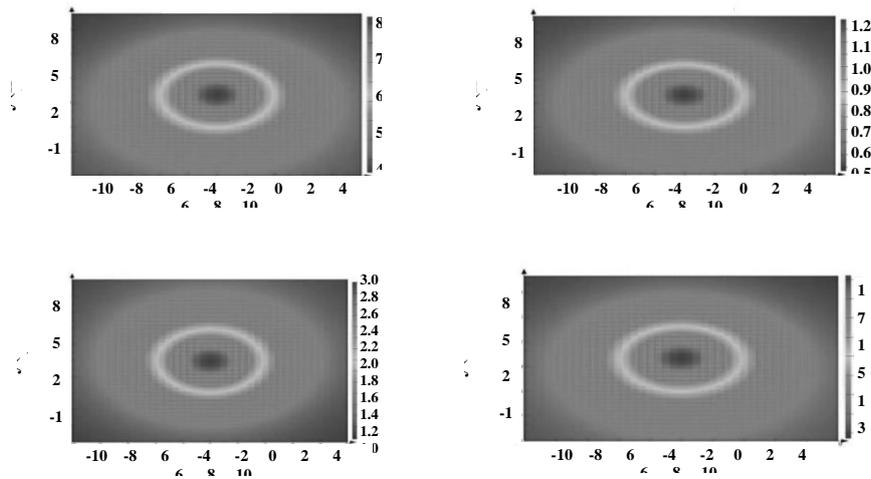


Fig.1. Electric field enhancement in the xy plane near the tip when the period of the grating is (a) 200 nm, (b) 250 nm, (c) 300 nm and (d) 208 nm (optimized) with 90 degree laser beam incident angle.

In the next step, the optical force near a laser-illuminated tapered tip for three period of grating 200, 250 and 300 nm and then for optimum value of circular gratings 208 nm was obtained. The results of these simulations are shown in figures 2 (a), 2 (b), 2 (c) and 2 (d) respectively.

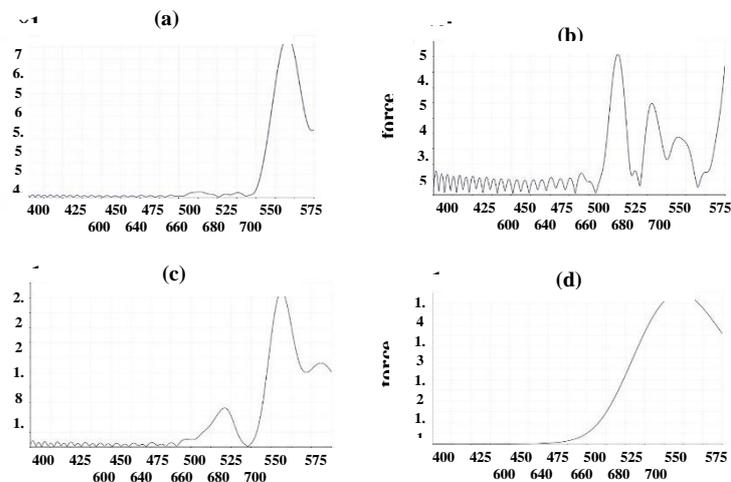


Fig. 2. Optical force distribution near the gold tapered tip when the period of circular grating is (a) 200 nm, (b) 250 nm, (c) 300 nm and (d) 208 nm (optimized antenna)

From these figures it is clear that by changing the geometry of the antenna, the optical force near the gold tip also changes. Also these figures show that for optimum value of circular gratings 208 nm both maximum light intensity and maximum optical force near the gold tip occurs. This maximum optical force is $1.4 \times 10^{-14} \frac{N}{W}$ and occurs when laser wavelength is 655 nm. One of the most important applications of this approach are increasing the resolution of microscopic photographs in tip-enhancement near field optical microscopy and decreasing of background signal.

Conclusion

In this theoretical work, the effect of antenna geometry on the electric field enhancement and optical force around gold tapered tip was investigated. The Maxwell's equations with Finite difference Time Domain (FDTD) simulation Lumerical Software were solved. The simulation results show that changing the period of gratings, electric field distribution and optical force around gold tapered tip changes. The optimization results show that tapered tip with period of gratings 208 nm has maximum optical force enhancement ($1.4 \times 10^{-14} \frac{N}{W}$) at 655 nm laser wavelength incident.

References

1. Elsherbeni, Z. Atev & V. Demir, 2009. SciTech Publishing, Inc., Raleigh 12: 47-61.
2. Frisch R. 1993. Experimenteller Nachweis des Einsteinschen Strahlungsriickstosses. Zeitschrift für Physik press. 86: 42–45.
3. Galarreta B. C., Rupar I., Young A., & Lagugn'e-Labarthe F. 2011. Mapping hot-spots in hexagonal arrays of metallic nanotriangles with azobenzene polymer thin films, Journal of Physical Chemistry C, 115 (31): 15318–15323.
4. Gerton J.M., Wade L.A., Lessard G.A., Ma Z. & Quake S.R. 2004. Tip-enhanced fluorescence microscopy at 10 nanometer resolution, Physical review letters, 93 (18): 432-441.
5. Krug, J. T. I., S'anchez, E. J. & Xie, X. S. 2002. Design of near-field probes with optimal field enhancement by finite difference time domain electromagnetic simulation, The Journal of Chemical Physics, 116 (8): 23-29.
6. Kharintsev. S. S., Alekseev. A., Loos J., 2017. Etchant-based design of gold tip apexes for plasmon-enhanced raman spectromicroscopy, Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy, 171 (6): 139–143.
7. Kharintsev S. S., Noskov A. I., Hoffmann G. G., & Loos J., 2013. Nano patterning and tuning of optical taper antenna apex for tip-enhanced raman scattering performance, Review Of Scientific Instruments 84 (7): 093106.
8. Larsen, R. E. & Metiu, H. 2001. Resolution and polarization in apertureless near-field microscopy. The Journal of Chemical Physics, 114 (7): 6851–6860.
9. Mohebbifar. M. R., Gainutdinov. R. Kh. & Khamadeev. M. A., 2015. The shift of Energy levels of a quantum dot in single electron transistor, Belgorod State University Scientific Bulletin, 41 (23): 56-61.
10. Martin, Y. C., Hamann, H. F. & Wickramasinghe, H. K. 2001. Strength of the electric field in apertureless near-field optical microscopy. Journal of Applied Physics, 89 (5): 5774–5778.
11. Martin, Y. C., Hamann, H. F. & Wickramasinghe, H. K. 2001. Strength of the electric field in apertureless near-field optical microscopy. Journal of Applied Physics, 89 (23):5774–5778.
12. Mulyanti B., Pawinanto R. E., Abdullah A. G., Hasanah L., Pantjawati A. B., Hamidah I., Nandiyanto A. B. D., Zain A. R., Menon P. S. & Shaari S., 2018. Modeling of microring resonators for biochemical detection, Materials Today: Proceedings 5 (13): 13703–13710.



13. Novotny, L. & Hecht, B. 2006. Principles of Nano-Optics, Cambridge University press. 15-48.
14. Novotny, L., S'anchez, E. J. & Xie, X. S. 1998. Near-field optical imaging using metal tips illuminated by higher-order Hermite–Gaussian beams. *Ultramicroscopy*, 71(4): 21–29.
15. Novotny L, Bharadwaj P & Deutsch B, 2009. Optical antennas, *Advances in Optics and Photonics*, 1 (3):438–483.
16. Novotny, L. 2008. Optical antennas tuned to pitch, *Nature*, 455 (7): 879-898.
17. Shimizu Y. & Sasada. H., 1998. Mechanical force in laser cooling and trapping, *American Journal of Physics*, 66 (1): 960–967.
18. Stenholm. S., 1986. The semiclassical theory of laser cooling, *Reviews of Modern Physics*. 58 (2): 699–739.
19. Sadeghi S. & S. Hamidi M., 2018. Enhanced Faraday rotation in one dimensional magneto-plasmonic structure due to Fano resonance, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 451 (1): 305-310.
20. Taflove A. & Hagness S. C., 2000. Computational Electrodynamics: the Finite - Difference Time – Domain Method. Artech House Press, 17-52.
21. Wang, Z. B., Luk'yanchuk, B. S., Hong, M. H., Lin, Y. & Chong, T. C. 2004. Energy flow around a small particle investigated by classical Mie theory. *Physical Review B*, 70 (9): 035418.
22. Wang Z. B., Joseph N., Li L. & Luk'yanchuk B. S. 2009. A review of optical near-fields in particle/tip-assisted laser nanofabrication, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 224 (12): 09544062.
23. Zohrabi. M., Mohebbifar. M. R., 2015. Electric field enhancement around gold tip optical antenna, *Plasmonics*, 10 (4): 887–892.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 622.235

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-121-134

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ
РАЗРУШЕНИЯ ТРЕЩИНОВАТЫХ ГОРНЫХ ПОРОД ВЗРЫВОМ**

**THE DISTRIBUTION OF ENERGY IN MECHANICAL PROCESSES
OF FRACTURED DESTRUCTION OF ROCKS BY EXPLOSION**

**В.Н. Тюпин, Т.И. Рубашкина
V. N. Tyupin, T.I. Rubashkina**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул.Победы, 85

Belgorod National Research University
85 Pobeda street, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: tyupinvn@mail.ru

Аннотация

Опыт работы горных предприятий показывает, что удельный расход взрывчатых веществ (ВВ) на подземных горных работах в 2-4 раза превышает расход на открытых горных работах. Для установления причин такого различия проведено математическое моделирование процесса разрушения и выброса трещиноватого массива взрывом, и составлено уравнение по распределению затрат энергии взрыва на механические формы работы (упруго-пластические деформации, выброс и трение) при отбойке трещиноватого массива группой зарядов ВВ на открытую поверхность. Теоретическими исследованиями и численными расчетами установлено, что более 50 % энергии взрыва расходуется на преодоление сил трения при перемещении горного массива. Достоверность полученных зависимостей подтверждена численными расчетами и сравнением теоретического удельного расхода ВВ с данными практики. Намечены направления работ по снижению сил трения при взрывной отбойке в условиях подземных и открытых разработок.

Abstract

The experience of mining enterprises shows that the specific consumption of explosives in underground mining is 2-4 times higher than the consumption of open mining. To establish the reasons for this difference, mathematical modeling of the process of destruction and release of a fractured array by an explosion was carried out, and an equation by distribution of the explosion energy costs for mechanical forms of work (elastic-plastic deformations, emission and friction) during blasting the fractured array by a group of explosive charges on an open surface was compiled. By theoretical studies and numerical calculations, it has been established that more than 50% of the explosion energy is expended on overcoming the friction forces when the rock array is moved. The reliability of the obtained dependences is confirmed by numerical calculations and a comparison of the theoretical specific consumption of explosives with practice data. Outlined directions of work to reduce friction during explosive blasting in underground and open-cast mining.



Ключевые слова: энергия взрыва, механический процесс разрушения, трещиноватый массив, упруго-пластические деформации, выброс, эффект трения, формулы расчета.

Keywords: explosion energy, mechanical process of destruction, fractured array, elastic-plastic deformation, emission, friction effect, calculation formulas.

Введение

В настоящее время взрывные работы применяются при открытых и подземных горных разработках, в основном, с целью отбойки горной массы от массива. При этом на качество взорванной горной массы накладываются определенные требования. Кроме того, каждое горное предприятие стремится уменьшить удельный расход взрывчатых веществ (ВВ) и объемы бурения, соблюдая заданное качество дробления. Для определения рациональных параметров буровзрывных работ учитываются физико-механические свойства пород, параметры трещиноватости, детонационные характеристики ВВ и геометрические параметры скважинных зарядов и их расположения. Все эти параметры учитывались в работах российских и зарубежных ученых и использовались в производстве [Дугарцыренов, 2015; Игнатенко, 2015; Кутузов, 2017, 2014; Мосинец, 1982; Овсянников, 2015; Снитка, 2016; Суханов, 1983; Фокин, 2015; Akande, 2013; Furtney, 2013; Ghiasi, 2016; Tyurin, 2013; Xia, 2014; Yang, 2018; Zheng, 2011]. При этом недостаточное внимание уделялось процессам, происходящим при деформировании и разрушении трещиноватого горного массива взрывом. В работах Мосинца [1975, 1982], Суханова, [1983] указано, что при взрыве энергия расходуется, в основном, на следующие механические формы работы: дробление массива, его перемещение и сейсмическое действие взрыва. Однако в трещиноватом горном массиве, который состоит из отдельностей, присутствует еще и эффект трения на гранях отдельностей при их перемещении [Тюпин, 2017, Шемякин, 1965]. Причем эффект трения и сейсмический эффект являются бесполезными формами работы с той разницей, что сейсмическое действие взрыва формируется за пределами зоны дробления отдельностей массива, а эффект трения создается внутри зоны дробления в процессе перемещения горного массива и, вероятно, поглощает значительное количество энергии.

Опыт работы горных предприятий показывает, что при взрывании одинаковых по физическим свойствам и трещиноватости массивов горных пород удельный расход ВВ на открытых разработках (ОГР) составляет 0,3–2,0 кг/м³, на подземных горных работах (ПГР) – 1–4 кг/м³. При отбойке в подземных условиях, как правило, взрывчатое вещество (ВВ) размещается в массиве более равномерно, что должно снижать затраты энергии взрыва и удельный расход ВВ на ПГР. Кроме того, при условии, что размер отдельностей не превышает кондиционного размера куска, ожидаемые затраты на отбойку при ОГР и ПГР должны быть минимальны и примерно одинаковы, однако при ПГР удельный расход ВВ значительно выше. В работе Мосинца [1982] увеличение удельного расхода ВВ в подземных условиях объясняется изменением требуемого среднего линейного размера куска раздробленной массы, который при ОГР составляет 0,2–0,4 м, при ПГР – 0,15–0,20 м, а также изменением логарифмического показателя степени дробления, значение которого, в конечном итоге, выражает увеличение вновь образованной поверхности. Оценим затраты энергии взрыва на образование свободной поверхности при дроблении 1 м³ горной породы. Экспериментально установлено [Мисник, 1967; Ржевский, 1978], что на образование единицы поверхности затрачивается энергия, равная 150–250 Дж/м².

При дроблении 1 м³ горной породы до среднего размера 0,4 м и 0,2 м образуется поверхность (S_B), равная 9 и 24 м² соответственно ($S_B = \frac{6V_0}{d_i} - S_0$, где V_0, d_i, S_0 – объем дробленной породы, средний размер куска после дробления, начальная свободная

поверхность). Удельная работа, необходимая для образования данной величины поверхности, будет равна $200 \cdot 9 = 1800 \text{ Дж/м}^3$ на ОГР и 4800 Дж/м^3 на ПГР. То есть, увеличение затрат энергии взрыва при ПГР примерно в 2,5 раза очевидно. Однако энергия взрыва, расходуемая на механические формы работы при отбойке 1 м^3 горной породы с удельным расходом например ВВ $0,5 \text{ кг/м}^3$ (для штатных ВВ), выраженная через полную идеальную работу взрыва приблизительно равна $2 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3$, то есть коэффициент полезного действия взрыва на равномерное дробление 1 м^3 горной породы равен $\frac{1,8 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 4 \cdot 10^6} \cdot 100 = 0,09\%$. Низкий КПД взрыва на дробление с заданной степенью

указывает на то, что изменение степени дробления является косвенным показателем, характеризующим затраты энергии взрыва. Основная часть энергии взрыва (более 99 %) расходуется на следующие формы механической работы, которые условно можно считать бесполезными – переизмельчение, упругое деформирование отдельностей, деформации на гранях естественных отдельностей, выброс породы, преодоление сил трения и зацепления в процессе перемещения отбиваемого массива, сейсмическое действия взрыва.

В связи с изложенным возникла необходимость проанализировать характер распределения энергии при взрывании, например, группы скважинных зарядов, расположенных в плоскости, параллельной открытой поверхности, и установить причины завышения затрат энергии взрыва в подземных условиях, численно проанализировав распределение энергии взрыва на различные механические формы работы. Это является целью настоящих исследований.

Объект и методы исследований

Объектом исследований является трещиноватый массив горных пород, в котором производится взрывание группы цилиндрических зарядов ВВ. Это приводит к деформированию, разрушению массива, выбросу его части и сопровождается трением на гранях отдельностей при их перемещении. Для исследований используется метод математического моделирования, основанный на законе сохранения энергии, с анализом полученных формул и численными расчетами.

Результаты исследований

Рассмотрим действие группы удлиненных цилиндрических зарядов ВВ, находящихся в трещиноватом массиве (рис. 1).

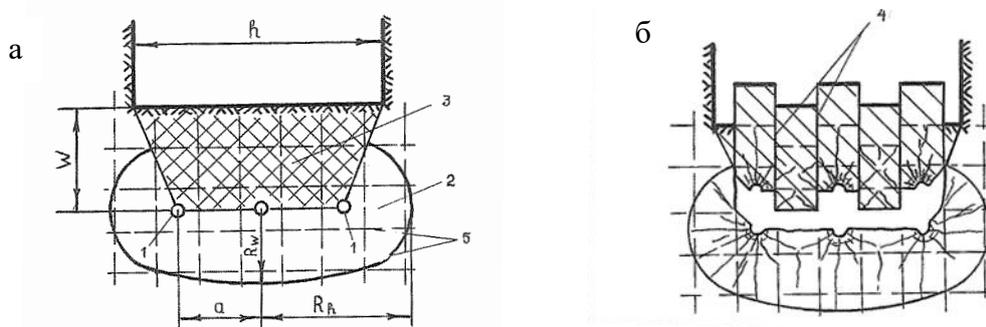


Рис. 1. Схема к расчету затрат энергии взрыва: а – до взрыва, б – после взрыва. 1 – заряды ВВ, 2 – зона деформирования, 3 – зона выброса, 4 – плоскости трения, 5 – естественная трещиноватость.

Fig. 1. Scheme for calculating the energy costs of the explosion, a – before the explosion, b – after the explosion. 1 – explosive charges; 2 – deformation zone; 3 – emission zone; 4 – frictions plane; 5 – natural fracture.

На расстоянии W от зарядов находится открытая поверхность ограниченной ширины h , параллельная группе зарядов. Пусть одна из главенствующих систем трещин перпендикулярна открытой поверхности. Такое расположение систем трещин характерно для месторождений гидротермального происхождения, где полезное ископаемое приурочено к тектоническим швам и разломам.

В дальнейшем будем основываться на энергетическом механизме деформирования и разрушения трещиноватого массива [Тюпин, 2017], согласно которому волны напряжений дробят отдельности, пронизанные зарядами ВВ. Расширение продуктов детонации (ПД) приводит к перемещению отдельностей, что сопровождается деформированием массива на гранях отдельностей, а также упругим деформированием и разрушением отдельностей в массиве за счет разности скоростей ближайших и более удаленных от заряда отдельностей. Иными словами, в массиве распространяется волна деформаций, представляющая собой перемещение раздробленных и не раздробленных отдельностей от заряда ВВ.

При взрыве группы зарядов, находящихся на расстоянии друг от друга, волны деформаций вначале распространяются по ломанной окружности (в соответствии с геометрией естественной трещиноватости) от каждого заряда. За счет взаимодействия волн деформаций зона деформирования приобретает ломанную эллиптическую форму. При дальнейшем распространении эллиптическая форма области деформирования трансформируется в ломанную окружность.

Наличие открытой поверхности вблизи зарядов ВВ приводит к интенсивному перемещению отдельностей в сторону поверхности, что обеспечивает выброс части массива.

Взрывание группы зарядов ВВ, расположенных на расстоянии друг от друга, обеспечивает неравномерность нагрузки относительно плоскости открытой поверхности. Максимальная нагрузка и скорость перемещения отдельностей при данной системе расположения трещин будет напротив зарядов ВВ (см. рис. 1). Меньшей скоростью, очевидно, будут обладать отдельности, расположенные между зарядами ВВ. Наличие разности скоростей между соседними слоями перемещающихся пород создает трение по граням естественных отдельностей и часть энергии расходуется на его преодоление.

Энергетическое уравнение в общем виде можно записать так:

$$E_M = A_{ид} \cdot Q = E_{yn} + E_B + E_{mp}, \quad (1)$$

где E_M – энергия взрыва, расходуемая на механические формы работы, E_{yn} – энергия, расходуемая на упругие деформации между гранями естественных отдельностей, E_B – кинетическая энергия выброса, E_{mp} – энергия, расходуемая на трение между отдельностями, $A_{ид}$ – полная идеальная работа взрыва, Q – масса заряда ВВ.

Энергию упруго-пластических деформаций трещиноватого массива можно определить, зная среднюю величину напряжения в деформируемом объеме и объем деформирования (при этом часть этой энергии за границей зоны интенсивного деформирования трансформируется в сейсмическую волну):

$$E_{yn} = \frac{\bar{\sigma}^2(r)}{2E} \Phi V_0, \quad (2)$$

где $\bar{\sigma}(r)$ – средняя величина сжимающего напряжения в пределах зоны дробления, E – модуль упругости, Φ – показатель трещиноватости, V_0 – объем деформирования.

Средняя величина сжимающего напряжения $\bar{\sigma}(r)$ определяется согласно теореме о среднем значении функции с учетом математического выражения при взрывании группы зарядов в подземных условиях [Тюпин, 2017]:

$$\bar{\sigma}(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{D\rho_B d_3 c(n+1)}{\Phi(W-0,5d_3)} \int_{0,5d_3}^W \frac{dW}{W} = \sigma(W) \ln\left(\frac{2W}{d_3}\right), \quad (3)$$

где D – скорость детонации, ρ_B – плотность заряжения, d_3 – диаметр заряда ВВ, W – ЛНС, n – количество зарядов ВВ; c – скорость продольной волны в отдельности.

При определении величины деформируемого объема массива будем считать, что основная энергия взрыва группы зарядов ВВ распределяется в пределах эллиптической зоны деформирования, которая на основании исследований равна

$$V_\partial = \pi R_h R_w l_3 = \frac{\pi^2}{256} \left(\frac{D\rho_B d_3 c}{\sigma(W)\Phi}\right)^2 (n+1)^2 \left[1 - \frac{h+a(n-1)}{2\pi W}\right] l_3, \quad (4)$$

где R_h, R_w – полуоси эллипса деформирования (см. рис. 1а), a, l_3 – расстояние между зарядами и длина заряда.

Подставляя (3) и (4) в (2), получим

$$E_{yn} = \frac{\pi^2}{512} \frac{(D\rho_B d_3 c)^2}{E\Phi} (n+1)^2 \left[1 - \frac{h+a(n-1)}{2\pi W}\right] \ln^2\left(\frac{2W}{d_3}\right) l_3. \quad (5)$$

Кинетическая энергия выбрасываемого объема равна $E_B = 0,5m\bar{v}^2(W)$ при массе выбрасываемого объема, равной (см. рис. 1)

$$m = \rho V_\partial = 0,5\rho[h+a(n-1)]Wl_3, \quad (6)$$

и средней скорости перемещения отдельностей на участке $0,5d_3-W$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{D\rho_B d_3 c(n+1)}{\rho\Phi(W-0,5d_3)} \ln\left(\frac{2W}{d_3}\right), \quad (7)$$

где ρ – объемная масса трещиноватого массива.

Тогда

$$E_B = \frac{\pi}{1024} \frac{(D\rho_B d_3 c)^2}{E\Phi} \frac{[h+a(n-1)]}{W} \ln^2\left(\frac{2W}{d_3}\right) (n+1)^2 l_3. \quad (8)$$

Если сложить (5) и (8), то после преобразований получается закономерность – суммарная энергия на деформирование и выброс горной породы при наличии открытой поверхности будет равна энергии деформирования при взрыве в безграничном массиве. При наличии открытой поверхности с увеличением ЛНС все большее количество энергии расходуется на упруго-пластические деформации и меньшее – на выброс части массива горных пород.

В процессе выброса части трещиноватого массива группой зарядов ВВ, расположенных на расстоянии друг от друга, трещиноватые слои горных пород напротив зарядов движутся в сторону открытой поверхности с большей скоростью, чем слои, расположенные в промежутках между зарядами. Разность скоростей соседних слоев обеспечивает трение между ними, для преодоления которого нужна дополнительная

энергия. Трение происходит за счет бокового распора деформируемой горной породы под действием сжимающих напряжений от зарядов ВВ.

Механическую модель твердого тела с внутренним трением впервые предложил Е.И. Шемякин [1965]. Им доказано, что в упругой среде затухание напряжения на фронте волны происходит обратно пропорционально расстоянию. В модели с внутренним трением – обратно пропорционально $R^{2\frac{\nu}{1-\nu}}$ (ν – коэффициент Пуассона), то есть происходит более интенсивное поглощение энергии с расстоянием за счет эффекта трения. Е.И. Шемякиным задача решена для безграничного массива.

В настоящей работе проведены исследования по определению энергетических затрат на трение при перемещении горной массы в узком очистном пространстве, то есть при наличии открытой поверхности.

Затраты энергии на трение определяются так:

$$E_{mp} = \mu \int_0^{\Delta} F_{mp} d\Delta = \mu \overline{F_{mp}} \Delta, \quad (9)$$

где μ – коэффициент трения, $F_{mp}, \overline{F_{mp}}$ – сила трения и ее средняя величина, возникающие между слоями горных пород, Δ – величина перемещения слоев горных пород друг относительно друга, достаточная для разделения массива на куски.

Среднюю величину силы трения в каждой точке от $0,5d_3$ до W можно определить через среднюю величину нормального к плоскости трения напряжения $\sigma_p(W)$ и суммарную площадь плоскостей трения S , то есть $\overline{F_{mp}} = \overline{\sigma_p(W)} S$. Среднее нормальное напряжение определяется как тангенциальное напряжение от средней величины сжимающего, определяемого по (3):

$$\overline{\sigma_p(W)} = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{D\rho_B d_3 c(n+1)\nu}{\Phi W(1-\nu)} \ln\left(\frac{2W}{d_3}\right). \quad (10)$$

Суммарная площадь плоскостей трения при их количестве N равна

$$S = NWl_3 = \frac{a(n-1) + d_e}{d_e} Wl_3 \approx \frac{h}{d_e} Wl_3. \quad (11)$$

Величину перемещения слоев трещиноватого массива друг относительно друга (Δ), достаточную для разделения выбрасываемого объекта на естественные отдельные, можно принять равной половине размера естественной отдельности, то есть $\Delta = 0,5d_e$. Учитывая, что $\overline{\sigma_p(W)}$ и S можно считать не зависящими от Δ , получим:

$$E_{mp} = \frac{\sqrt{\pi}}{32} \mu \frac{D\rho_B d_3 c\nu}{\Phi(1-\nu)} (n+1) [a(n-1) + d_e] l_3 \ln^2\left(\frac{2W}{d_3}\right). \quad (12)$$

Анализ (12) показывает, что затраты энергии взрыва на преодоление трения наиболее существенно регулируется числом одновременно взрываемых скважин и диаметром заряда.

Существенное влияние на величину E_{mp} оказывает показатель трещиноватости [Тюпин, 2017] $\Phi = 1 + \frac{5}{8} \frac{\delta k}{d_e \xi}$, где δ, d_e, ξ, k – величина раскрытия трещин, размер отдельности, безразмерная площадь скальных контактов ($\xi = 3 \cdot 10^{-4}$), количество систем трещин. На ОГР при ведении взрывных работ в районе 1-2 рядов скважин из-за

нарушенности массива $\Phi=10-30$, на ПГР – $\Phi=3-12$. То есть энергетические затраты на трение при открытых и подземных горных работах могут отличаться в несколько раз.

Кроме того, влияние на величину $E_{тр}$ оказывает коэффициент трения μ , который можно определить через угол внутреннего трения $\mu = tg\varphi$. В работе Фисенко [1965] приводятся углы трения при различной поверхности берегов трещин отдельностей массива (табл. 1). В таблицу внесены значения μ , а также ориентировочные значения коэффициента крепости горных пород.

Таблица 1
Table 1

Значения коэффициента трения в зависимости от характера поверхности трещин и коэффициента крепости
The values of the friction coefficient depending on the type of surface cracks and the coefficient of strength

Наименование пород	f	Угол трения (φ) и коэффициент трения (μ) при характере поверхности трещин			
		неровной, шероховатой		равной, гладкой	
		φ	μ	φ	μ
Порфириты, роговики, джеспилиты, крепкие песчаники	16-20	28-31	0,53-0,6	20-26	0,35-0,49
Вторичные кварциты, гранодиориты, кварцевые порфиры, скарнированные породы, сиениты, диориты	12-18	25-28	0,47-0,53	17-20	0,3-0,36
Известняки, метаморфические сланцы, магнетиты	8-12	24-27	0,4-0,51	16-19	0,29-0,34
Глинистые сланцы, аргиллиты	6-8	23-26	0,42-0,49	15-18	0,27-0,32
Филлиты, талько-хлоритовые и серицитовые сланцы	4-8	23-25	0,42-0,47	9-12	0,16-0,21
Любые породы с трещинами, заполненными рыхлым или глинистым материалом, зеркала скольжения	–	10-12	0,17-0,21	10-12	0,17-0,21

Подставляя (5), (8) и (12) в (1), получим выражение для определения затрат энергии взрыва на механической формы работы при взрывании группы зарядов ВВ, параллельных открытой поверхности ограниченной ширины:

$$E_m = \frac{(D\rho_B d_3 c)^2}{E\Phi} (n+1)^2 l_3 \left\{ \frac{\pi^2}{512} \ln^2 \left(\frac{2W}{d_3} \right) + \frac{\sqrt{\pi} [a(n-1) + d_e] \ln \left(\frac{2W}{d_3} \right)}{32 D\rho_B d_3 (n+1)} \frac{\mu E \nu}{c(1-\nu)} \right\} \quad (13)$$

или

$$E_m = \frac{\pi\Phi\bar{\sigma}^2(W)}{2E} W^2 l_3 + \frac{\mu\nu\bar{\sigma}(W)}{2(1-\nu)} h W l_3, \quad (14)$$

где $\bar{\sigma}(W)$ – средняя величина сжимающего напряжения на участке расстояния $0,5d_3 - W$,

$$\bar{\sigma}(W) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{D\rho_B d_3 c}{\Phi W} (n+1) \ln\left(\frac{2W}{d_3}\right). \quad (15)$$

Первый член правой части (13) и (14) представляет собой энергию, необходимую для деформирования, разрушения и выброса горной породы. Второй – энергию, необходимую для преодоления сил трения, возникающих между слоями, движущимися с различной скоростью.

Величину $\frac{\pi[D\rho_B d_3 c(n+1)]^2}{256\Phi^2}$ в первом члене (13) можно представить через $[\sigma(W)W]^2$ и $\sigma(W) = \frac{\sigma_p(1-\nu)}{\nu}$, так как на границе зоны дробления соблюдается условие – величина сжимающих напряжений $\bar{\sigma}(W)$, обеспечивающих дробление отдельностей, определяется пределом прочности отдельности на разрыв (σ_p) и соотношением коэффициента Пуассона (ν). Тогда

$$E_m = \frac{\pi\sigma_p^2}{2E} \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^2 \Phi \left(W \ln \frac{2W}{d_3}\right)^2 l_3 + \frac{\mu\sigma_p h W}{2\Phi} l_3 \ln\left(\frac{2W}{d_3}\right). \quad (16)$$

Проанализируем численно распределение затрат энергии взрыва на деформирование, выброс и трение при отбойке трещиноватого массива в условиях поэтажно-камерной отбойки. Анализ будем проводить по формулам (5), (8), (12) в зависимости от расстояния между зарядами и открытой поверхностью при $D=3,3\cdot 10^3$ м/с; $\rho_B=10^3$ кг/м³; $d_3=5,7\cdot 10^{-2}$ м; $\rho=2,5\cdot 10^3$ кг/м³; $\Phi=10$; $n=3$; $h=2,5$; $a=1$ м; $l_3=10$ м; $\mu=0,2$; $c=4\cdot 10^3$ м/с; $\nu=0,3$; $d_e=0,2$ м. Данные вычисления приведены на рис. 2.

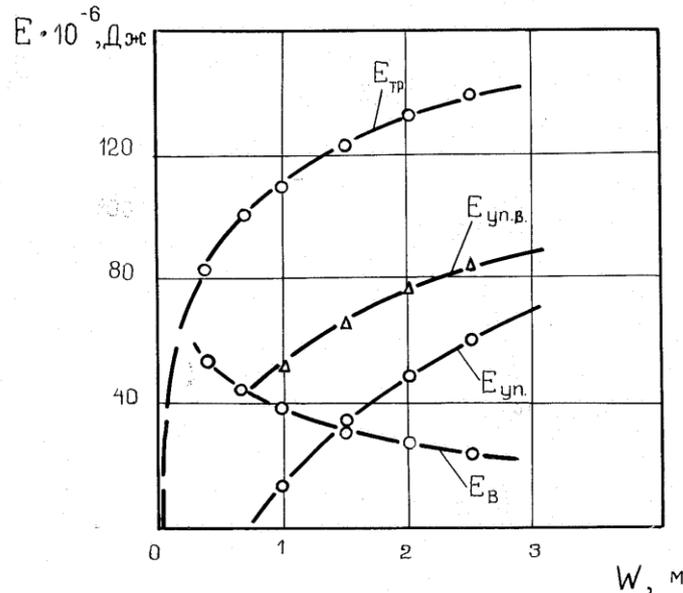


Рис. 2. Зависимость затрат энергии взрыва (E) от величины ЛНС (W).

E_B , E_{yn} , E_{mp} – энергия, расходуемая на выброс, упруго-пластические деформации и трение соответственно. $E_{yn} + E_B = E_{yn.B}$

Fig. 2. The dependence of the energy costs of the explosion (E) on the value of (W).

E_B , E_{yn} , E_{mp} - energy spent on the release of elastic-plastic deformation and friction, respectively.

$$E_{yn} + E_B = E_{yn.B}$$

Анализ рисунка показывает, что энергия, расходуемая на упруго-пластические деформации и разрушение (E_{yn}) массива увеличивается при увеличении W . Напротив, энергия на выброс горной породы максимальна при малой ЛНС и снижается с увеличением W . Вероятно, оптимальная величина получается при одинаковых затратах энергии взрыва на упруго-пластические деформации и выброс. При указанных параметрах взрывания и свойствах массива применяемая ЛНС на рудниках ПАО «Приаргунское производственное горно-химическое объединение» равна 1,5-1,6 м, что соответствует точке пересечения E_{yn} и E_B на рис. 2. Затраты энергии, необходимые для преодоления сил трения (E_{mp}) при перемещении массива, примерно в 2 раза превышают затраты на деформирование и выброс отбываемого объема массива. E_{mp} при $W=0,5 d_3$ равна нулю, что очевидно из общих физических соображений и подтверждает правомерность приведенной зависимости. Анализ рис. 2 показывает, что суммарная энергия на деформирование и выброс ($E_{yn.B}$), а также на трение, увеличивается при изменении W от 0,7 до 2,5, при этом кривые $E_{yn.B}$ и E_{mp} параллельны. Возможно это завуалировало фактор трения и предшествующие прикладные теоретические и экспериментальные исследования не позволили выделить затраты энергии на преодоление сил трения. Удельный расход ВВ определяется путем деления правой части (13), (14), (16) на $A_{uo}V_0 = A_{uo}Whl_3$, где V_0 – объем отбываемой горной породы, A_{uo} – полная идеальная работа взрыва.

Теоретический удельный расход ВВ, необходимый для деформирования и перемещения массива, а также для преодоления сил трения, равен

$$q = \frac{(D\rho_B)^2(n+1)^2 d_3^2}{A_{uo}Wh\rho\Phi} \left\{ 2 \cdot 10^{-2} \ln^2 \left(\frac{2W}{d_3} \right) + 5 \cdot 10^{-2} \frac{[a(n-1)+d_e]\mu\rho c v}{D\rho_B(n+1)(1-\nu)} \ln \left(\frac{2W}{d_3} \right) \right\}, \quad (17)$$

$$q = \frac{\pi\sigma_p^2\Phi}{2EA_{uo}} \left(\left(\frac{1-\nu}{\nu} \right)^2 \right) \frac{W}{h} \ln^2 \left(\frac{2W}{d_3} \right) + \frac{\mu\sigma_p}{2\Phi A_{uo}} \ln \left(\frac{2W}{d_3} \right), \quad (18)$$

$$q = \frac{\pi\Phi\bar{\sigma}^2(W)}{2EhA_{uo}} W + \frac{\mu\nu\bar{\sigma}(W)}{2\Phi A_{uo}(1-\nu)}. \quad (19)$$

Важно знать, какое количество энергии поглощается на деформирование и перемещение ($q_{yn.e}$), а также на преодоление сил трения (q_{mp}), при ведении взрывных работ на открытых и подземных работах. Свойства массивов пород на ОГР и ПГР характеризуются показателем трещиноватости Φ , который является, в основном, функцией величины раскрытия естественных трещин в массиве при постоянстве размера отдельности. Сильная нарушенность массива предшествующими взрывами на ОГР обеспечивает величину раскрытия трещин от 2 до 10 мм и Φ , равный 10-30, на ПГР – раскрытие 0,1-2,0 мм и $\Phi=3-10$. Зависимости $q_{yn.e}$ и q_{mp} от Φ приведены на рис. 3.

В соответствии с формулой (18) расчеты на ОГР проводились с учетом того, что соседние скважины не взаимодействуют, и значит $h=a=W=3$ м, а число скважин равно 1. На ПГР примем $h=3$ м, $n=2$, $a(n-1)+d_e=h$, $W=2,5$ м. Диаметр заряда в том и другом случае равен 0,105 м, $A_{uo}=4 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\sigma_p=0,8 \cdot 10^7$ Па. Остальные параметры, в том числе и показатель трещиноватости, приведены выше. Анализ зависимостей (см. рис. 3) показывает, что удельный расход ВВ на ПГР превышает расход на ОГР в 1,2-3 раза. Это связано с тем, что затраты на преодоление сил трения в условиях ПГР существенно превышают таковые на ОГР. Минимальные удельные расходы ВВ на ОГР и ПГР равны при показателе трещиноватости 5-10 и 15-20 соответственно. То есть на ОГР и ПГР существует оптимальная величина показателя трещиноватости, обеспечивающая минимум затрат на все механические формы работы.

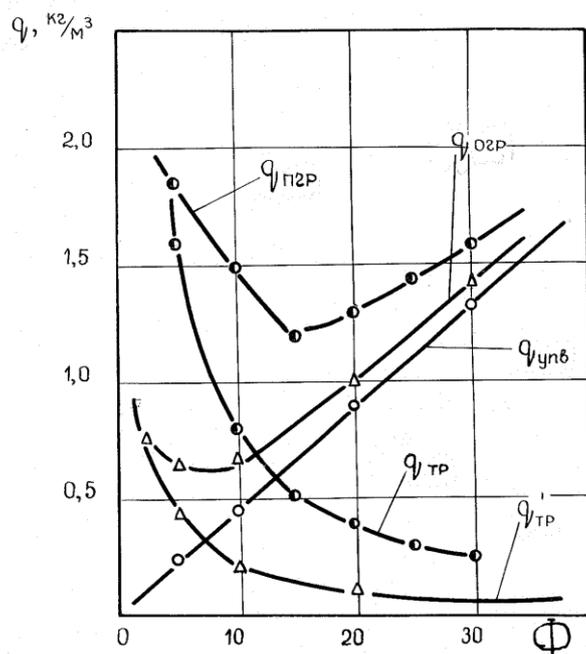


Рис. 3. Зависимость удельного расхода ВВ от показателя трещиноватости (Φ) на подземных ($q_{\text{ПГР}}$) и открытых ($q_{\text{ОГР}}$) горных работах: $q_{\text{тр}}$ и $q'_{\text{тр}}$ – удельный расход ВВ на трение при ПГР и ОГР соответственно, $q_{\text{упв}}$ – удельный расход на деформирование и выброс на ОГР и ПГР
 Fig. 3. The dependence of the specific consumption of explosives on the rate of fracture in underground and open cast mining: $q_{\text{тр}}$ and $q'_{\text{тр}}$ – are the specific consumption of explosives for friction with the PGR and the OGR respectively, $q_{\text{упв}}$ – the specific consumption of deformation and emission on the OGR and PRT

Для доказательства правильности принятой схемы расчета и достоверности полученных зависимостей по определению удельного расхода ВВ проведем численную проверку формулы (17) в зависимости от d_3 и h при остальных параметрах, приведенных выше. Результаты расчетов и их сравнение с данными, проверенными практикой на ПГР [Мосинец, 1975; Проектирование..., 1974], приведены на рис. 4. Анализ рисунков показывает на достаточную сходимость результатов исследований и данных, проверенных практикой.

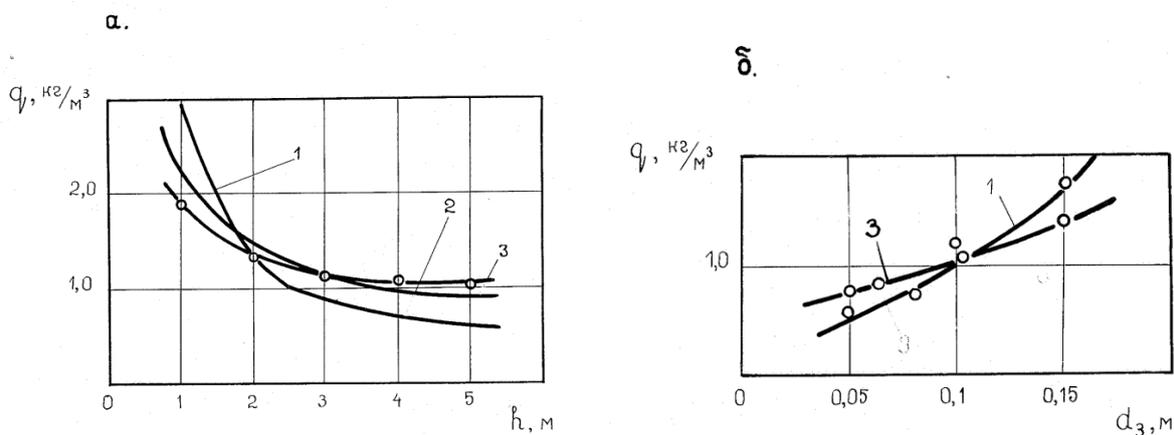


Рис. 4. Зависимость удельного расхода ВВ (q): а) от ширины очистного пространства (h); б) от диаметра заряда ВВ (d_3) [Мосинец, 1975; Проектирование..., 1974], 3 – теоретическая
 Fig. 4. The overhang of specific consumption of explosives (q): а) of the width of the cleaning space (h); б) on the diameter of the explosive charge (d_3). 1 – according to [6], 2 – according to [9], 3 – theoretical



На основании полученных зависимостей по определению удельного расхода ВВ на отбойку массива были определены элементы затрат энергии взрыва на различные формы механического действия и рассчитаны параметры БВР при подэтажно-камерной отбойке маломощных рудных тел в различных по трещиноватости массивах. Параметры a и W рассчитывались для достижения требуемой степени дробления на основе энергетической модели деформирования и разрушения трещиноватого массива взрывом [Тюпин, 2017] и приведены в табл. 2. Значения $q_{ув}$, $q_{тр}$, $q_{теор}$ определялись по формуле (18). Проектный удельный расход ВВ ($q_{п}$) определен в соответствии с геометрией расположения скважин по формуле [Тюпин, 2017]:

$$q_{п} = 0,6 \frac{d_3^2 n}{Wh} \rho_B. \tag{20}$$

Таблица 2
Table 2

Расчет элементов удельного расхода ВВ в трещиноватых массивах на различные механические формы при подэтажно-камерной отбойке ($d_3=0,057$ м, $h=2$ м)
Calculation of elements of specific consumption of explosives in fractured arrays for various mechanical forms with sublevel chamber breaking ($d_3= 0.057$ m, $h = 2$ m)

Размер отдельности, d_e , м	a , м	n	W , м	Удельный расход ВВ, кг/м ³			
				теоретический			проектный
				$q_{ув}$	$q_{тр}$	$q_{теор}$	
<0,05	2,3	2	1,4	0,27	0,4	0,67	0,79
0,05-0,15	1,7	2	1,1	0,34	1,0	1,34	1,76
0,15-0,40	1,3	3	1,1	0,74	1,52	2,26	2,64
0,40-1,0	1,1	3	0,94	1,0	2,2	3,20	3,4
>1,0	0,9	3	0,8	1,26	2,6	3,86	3,82

Проектный удельный расход ВВ должен быть не менее теоретического для надежной отбойки породы от массива, то есть без образования непроработанной части массива.

Анализ численных значений табл. 2 показывает, что затраты энергии на преодоление сил трения значительны и превышают затраты на деформирование, разрушение и выброс горной породы от 1,5 для легко взрываемых до 2,5 раза для трудновзрываемых горных пород.

Заключение

Анализ практических данных горных предприятий показывает, что удельный расход ВВ на подземных горных работах в 2–4 раза превышает расход на открытых горных работах. Для установления причин такого различия проведено математическое моделирование процесса разрушения и выброса трещиноватого массива взрывом, и составлено уравнение по распределению затрат энергии взрыва на механические формы работы (упругопластические деформации, выброс и трение). Теоретическими исследованиями и численными расчетами установлено, что более 50 % энергии взрыва расходуется на преодоление сил трения при перемещении горного массива. Для снижения удельного расхода ВВ при ведении взрывных работ в подземных условиях (отбойка руды и проходка выработок) в трещиноватых массивах можно наметить направления работ, снижающих эффект трения, то есть затраты на бесполезные формы механической работы:

1. Подготовка в подземных условиях трещиноватого массива (с размером отдельности меньше размера кондиционного куска) путем предварительной инъекции



через шпурсы или скважины в естественные трещины специальных жидкостей, снижающих трение между отдельностями.

2. В трещиноватых массивах с размером отдельности, не превышающим размер кондиционного куска, необходимо выбирать рациональный по детонационным характеристикам тип ВВ с минимальным значением $\frac{(D\rho_B)^2}{A_{\text{ш}}}$.

3. Применять параллельно сближенные скважинные заряды ВВ, поскольку при взрыве происходит их сбойка и массив между ними сдвигается без смещения отдельностей относительно друг друга. При этом площадь плоскостей трения и затраты энергии уменьшаются в разы.

4. Поскольку вода в естественных трещинах является элементом смазки, то необходимо провести исследования по изучению влияния обводненности массива на качество его дробления взрывом на открытых и подземных горных разработках.

5. Необходимо провести исследования по влиянию воды в трещинах массива на степень нарушенности законтурной части массива и определить размер зоны заколов.

Список литературы References

1. Дугарцыренов А.В., Ким С.И., Бельченко Е.Л., Николаев С.П. 2015. Требования к выбору параметров БВР для дробления сложноструктурных массивов горных пород комбинированными и дополнительными зарядами. Взрывное дело, 113(70): 142–148.

Dugartsyrenov A.V., Kim S.I., Belchenko E.L., Nikolaev S.P. Trebovaniya k vyboru parametrov BVR dlya drobleniya slozhnostrukturnykh massivov gornyh porod kombinirovannymi i dopolnitelnymi zaryadami [Requirements for the selection of BVR parameters for crushing complex-structural rock masses with combined and additional charges]. Vzryvnoe delo, 113(70): 42–148 (in Russian).

2. Игнатенко И.М., Коновалов А.В., Овсянников А.Н. 2015. Компьютерная технология расчета параметров буровзрывных работ на карьерах. Черная металлургия, 10(1390): 35–37.

Ignatenko I.M., Konovalov A.V., Ovsyannikov A.N. Computernaya tehnologiya rascheta parametrov burovzryvnykh работ na kar'erah [Computer technology for calculating the parameters of drilling and blasting operations in quarries]. Chernaya metallurgiya, 10(1390): 35–37 (in Russian).

3. Кутузов Б. Н., Тюпин В. Н. 2017. Метод расчета параметров буровзрывных работ на карьерах с целью обеспечения заданного качества дробления горных пород. Горный журнал, 8: 66–69.

Kutuzov B.N., Tyupin V.N. 2017. Metod rascheta parametrov burovzryvnykh работ na karerakh s celyu obespecheniya zadannogo kachestva drobleniya gornyh пород [Method of calculating the parameters of drilling and blasting operations in quarries in order to ensure the specified quality of crushing of rocks], Gornyi zhurnal, 8: 66–69 (in Russian).

4. Кутузов Б.Н. 2014. Справочник взрывника: в 2 ч. Сер.: Библиотека горного инженера. М., Горное дело ООО «Коммерческий центр», Т. 10. Взрывное дело. Кн. 1. Ч. II. Техника, технология и безопасность взрывных работ: 304 с.

B. Kutuzov. 2014. Spravochnik vzryvnika: v 2 ch. Ser.: Biblioteka gornogo inzhenera. [Blaster's Handbook: Ser. Library of a mining engineer] М., Gornoe delo ООО Kommercheskyi Center, T. 10. Vzryvnoe del. Kn. 1. Ch. II. Tehnika, tehnologiya i bezopasnost vzryvnykh работ: 304 p. (in Russian).

5. Мисник Ю.М., Долгов К.А. 1967. Удельная поверхностная энергия – новый показатель дробимости горной породы и его применение в расчетах параметров взрывных пород. ФТПРПИ. Новосибирск, 2: 104-106.

Misnik Yu.M., Dolgov K.A. 1967. Udelnaya poverhnostnaya energiya – novyi pokazatel drobimosti gornoi породы I ego primenenie v raschetah vzryvnykh пород. [Specific surface energy - a new indicator of the crushability of a rock and its use in calculating parameters of explosive rocks]. FTPRPI. Novosibirsk, 2: 104-106. (in Russian).

6. Мосинец В.Н., Пашков А.Д., Латышев В.А. 1975. Разрушение горных пород. М., Недра: 216 с.

Mosinets V.N., Pashkov A.D., Latyshev V.A. 1975. Razrushenie gornyh porod. [Destruction of rocks]. M., Nedra: 216 p. (in Russian).

7. Мосинец В.Н., Абрамов А.В. 1982. Разрушение трещиноватых и нарушенных горных пород. М., Недра: 247 с.

Mosinets V.N., Abramov A.V. 1982. Razrushenie treshinovatykh i narushennykh gornyh porod. [Destruction of fractured and disturbed rocks]. M., Nedra: 247 p. (in Russian).

8. Овсянников А.Н., Игнатенко И.М., Дунаев В.А. 2015. Районирование карьерного поля по взрываемости горных пород (на примере рудника «Железный» ОАО «Ковдорский ГОК»). Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Естественные науки, 15(212): 172–177.

Ovsyannikov A.N., Ignatenko I.M., Dunaev V.A. 2015. Raionirovanie karernogo polya po vzryvaemosti gornyh porod (na primere rudnika Zheleznyy OAO Kovdorsky GOK). [The zoning of the quarry field by rock explosiveness]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Estestvennye nauki, 15 (212): 172-177. (in Russian).

9. Проектирование взрывных работ в промышленности. 1974. Под ред. Б.Н. Кутузова. М., Недра: 328 с.

Proektirovanie vzryvnykh rabot v promyshlennosti. [Designing blasting in industry]. Ed. B.N. Kutuzov. 1974. M., Nedra: 328 p.

10. Ржевский В.В., Новик Г.Я. 1978. Основы физики горных пород. М., Недра: 390 с.

Rzhevsky V.V., Novik G.Ya. 1978. Osnovy phiziki gornyh porod. [Fundamentals of physics of rocks]. M., Nedra: 390 p. (in Russian).

11. Снитка Н.П., Мислибоев И.Т. 2016. Экспериментальное обоснование параметров сетки скважин на карьерах в зоне взрывного ослабления породного массива. Горный журнал, 2: 13–15.

Snitka N.P., Misliboev I.T. 2016. Experimentalnoe obosnovanie parametrov setki skvazhin na karerakh v zone vzryvnogo oslableniya porodnogo massiva. [Experimental substantiation of the parameters of the grid of wells in open pits in the zone of explosive weakening of the rock mass]. Gornyy zhurnal, 2: 13–15. (in Russian).

12. Суханов А.Ф., Кутузов Б.Н. 1983. Разрушение горных пород взрывом. М., Недра: 344 с.

Sukhanov A.F., Kutuzov B.N. 1983. Razrushenie gornyh porod vzryvom/ [Destruction of rocks by an explosion]. M., Nedra: 344 p. (in Russian).

13. Тюпин В.Н. 2017. Взрывные и геомеханические процессы в трещиноватых напряженных горных массивах. Белгород, ИД «Белгород» НИУ «БелГУ»: 192 с.

Tyupin V.N. 2017. Vzryvnyye i geomechanicheskiye processy v treshinovatykh napryazhennykh gornyh massivakh. [Explosive and geomechanical processes in fractured strained mountain ranges]. Belgorod, ID Belgorod NIU BelGUP: 192 s. (in Russian).

14. Фисенко Г.Л. 1965. Устойчивость бортов карьеров и отвалов. М., Недра: 270 с.

Fisenko G.L. 1965. Ustoychivost bortov karerov i otvalov. [Stability of pit walls and dumps]. M., Nedra: 270 p. (in Russian).

15. Фокин В. А., Тогунов М. Б., Сёмкин С. В., Шитов Ю. А. 2015. Методика расчета параметров буровзрывного дробления массива горных пород при малой высоте уступов в карьере. Горный журнал, 2: 51–54.

Fokin V.A., Togunov M.B., Syomkin S.V., Shitov Yu.A. 2015. Metodika rascheta parametrov burovzryvnogo drobleniya massiva gornyh porod pri maloy vysote ustupov v karere. [Method of calculating the parameters of drilling and blasting crushing of an array of rocks with a small height of ledges in a quarry]. Gornyy zhurnal, 2: 51–54.

16. Шемякин Е.И. 1965. О волнах напряжений, возникающих при взрыве в прочных горных породах. Л., Труды ВНИМИ, Изд. ВНИМИ: 5-15.

Shemyakin E.I. 1965. O volnah napryazheniy, vznikayushih pri vzryve v prochnykh gornyh porodah. [On the stress waves arising from the explosion in strong rocks]. L., Trudy VNIMI, Izd. VNIMI: 5-15. (in Russian).

17. Furtney J. K., Sellers E., Onederra I. 2013. Simple models for the complex process of rock blasting. Rock Fragmentation by Blasting: Proceedings of the 10th International Symposium. Boca Raton, CRC Press: 275–282.



18. Zheng Bingxu, Li Zhanjun, Liu Yi. 2011. Theory and Practice of the Fragmentation Control of Rock Blasting. Proceedings of the 7th International Conference on Physical Problems of Rock Destruction. China: 188–194.
19. Akande J. M., Lawal A. I. 2013. Optimization of Blasting Parameters Using Regression Models in Ratcon and NSCE Granite Quarries, Ibadan, Oyo State, Nigeria. *Geomaterials*, Vol. 3, 1: 28–37.
20. Ghiasi M., Askarnejad N., Dindarloo S., Shamsoddini H. 2016. Prediction of blast boulders in open pit mines via multiple regression and artificial neural networks. *International Journal of Mining Science and Technology*. Vol. 26, 2: 183–186.
21. Yang L.Y., Ding C.X. 2018. Fracture mechanism due to blast-imposed loading under high static stress conditions. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 107: 150–158.
22. Xia X., Li H., Niu J., Li J., Liu Y. 2014. Experimental study on amplitude change of blast vibrations through steps and ditches. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. Vol. 71: 77–82.
23. Tyupin V.N. 2013. Raising the efficiency of blasting in quarries. Proceedings of the 1 International scientific conference on economic management in mineral activities. Hanoi, Vietnam: 586-590.

УДК 531.2

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-135-144

**ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ
СТАЦИОНАРНОЙ ФОРМЫ ЭРИТРОЦИТА
В ДВУМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

**OPTIMIZATION MODEL OF THE ERYTHROCYTE
STATIONARY SHAPE IN TWO-DIMENSIONAL APPROXIMATION**

**А.В. Голочалова, Э.Б. Кулумбаев
A.V. Golochalova, E.B. Kulumbaev**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University,
85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kulumbaev@bsu.edu.ru

Аннотация

Разработана модель условной нелинейной минимизации упругой энергии мембраны для расчета в двумерном приближении стационарных форм эритроцита в норме и при наличии внешних воздействий. Рассчитана равновесная форма при заданном объеме и площади поверхности нормального эритроцита, которая качественно согласовывается с экспериментально наблюдаемой и с результатами двумерного динамического описания релаксации формы эритроцита. Внешние воздействия осмотического давления или стенок капилляра при аспирации эритроцита имитируются наложением дополнительных условий в виде ограничений на вектор-аргумент целевой функции. Результаты расчета формоизменения под действием осмотического давления или капиллярной аспирации качественно соответствует данным наблюдений.

Abstract

A model of conditional nonlinear minimization of the erythrocyte membrane's elastic energy has been developed for the calculation its stationary shapes in the two-dimensional approximation in normal conditions and in the existence of external influences. The equilibrium shape was calculated for a given volume and surface area of a normal red blood cell, which qualitatively agrees with the experimentally observed and with the results of a two-dimensional dynamic description of the erythrocyte shape relaxation. The external effects of osmotic pressure or the capillary walls during a red blood cell aspiration are simulated by imposing additional conditions in the form of constraints on the vector-argument of the objective function. The results of the calculation of deformation under the action of osmotic pressure or capillary aspiration of a red blood cell qualitatively correspond to observational data.

Ключевые слова: эритроцит, форма мембраны, упругая энергия, оптимизационная, модель.

Keywords: erythrocyte, membrane shape, elastic energy, optimization model.

Введение

Эритроциты или красные кровяные тельца – это наиболее многочисленные клетки крови, концентрация которых примерно равна $5 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-3}$, а занимаемый ими объем составляет 40–45 % от общего объема крови [Herman, 2007; Caro et al., 1978]. Поэтому динамика крови – суспензии форменных элементов (клеток) крови в плазме – в



наибольшей степени определяется механическими свойствами эритроцитов и в значительно меньшей степени зависит от свойств лейкоцитов и тромбоцитов, занимающих только 0,3 % и 0,15 % объема цельной крови соответственно. Тогда для установления адекватных реологических свойств крови, являющейся неньютоновской жидкостью [Caro et al., 1978], актуальными становятся экспериментальные и теоретические исследования движения и деформирования отдельных эритроцитов. В частности, значимым является нахождение равновесных (стационарных) форм эритроцита при различных внешних условиях.

Нормальный зрелый эритроцит человека состоит из эластичной мембраны и ограниченного ею почти насыщенного раствора гемоглобина [Herman, 2007]. Мембрана эритроцитов обеспечивает гомеостаз и функциональное состояние эритроцита, имеет сложную структуру, включая липидный бислой и подстилающую его спектриновую сеть. Толщина мембраны составляет ~ 10 nm, а ее массовая доля – не более 3 % от массы всей клетки [Caro et al., 1978].

Во взвешенном состоянии в плазме крови или в другом изотоническом растворе нормальный эритроцит имеет дисковидную двояковогнутую форму. «Усредненный» эритроцит имеет диаметр диска $7.8 \mu\text{m}$, площадь поверхности $134 \mu\text{m}^2$, объем $94 \mu\text{m}^3$ [Evans, Fung, 1972]. «Целесообразность» создания природой эритроцита такой структуры, формы и размеров для системы переноса кислорода в организме аргументировано обсуждается в работе Атауллаханова и др. [2018].

Считается, что форма эритроцита в норме не деформирована и обусловлена свойствами его мембраны. Последнее подтверждается экспериментально наблюдаемым примерным восстановлением формы и размеров “тенями” эритроцитов – эритроцитов, первоначально лишенных гемоглобина в результате гемолиза и вновь заполненных подходящим изотоническим раствором [Caro et al., 1978]. Дисковидная двояковогнутая форма обеспечивает способность эритроцитов сильно деформироваться без изменения объема и площади поверхности в микрососудах (например, при диаметре $8 \mu\text{m}$ они могут проходить через капилляры диаметром $3 \mu\text{m}$ и длиной $12 \mu\text{m}$ [Caro et al., 1978]) и выполнять свою основную функцию – транспорт газов в системе кровообращения. Неизменность объема и площади поверхности эритроцита обусловлены малыми сжимаемостью жидкого клеточного содержимого и растяжимостью мембраны соответственно.

В настоящее время численное моделирование формы и деформирования эритроцита проводится обычно на основе континуального и дискретного подходов [Ju et al., 2015]. В рамках первого подхода мембрана считается двумерной сплошной средой, равновесная конфигурация которой при изотропной нагрузке поддерживается за счет внутренних натяжений, изгибающих моментов и поперечных сил, и рассчитывается на основе различных вариантов нелинейной теории тонкостенных оболочек [Pozrikidis, 2001]. Второй подход использует дискретное приближение мембраны системой упруго-связанных мезоскопических частиц, движение и равновесие которых рассчитывается на основе ньютоновской механики с учетом сил упругих деформаций растяжения, изгиба, диссипативной силы вязкого трения и штрафных сил, стремящихся упругим образом обеспечить заданные значения площади поверхности мембраны и ограниченного ею жидкого объема [Pivkin, Karniadakis, 2008].

В механике при исследовании устойчивости деформируемых систем такие подходы классифицируются как статический и динамический, а для расчета равновесных форм упругих тел отдельно выделяется еще энергетический метод [Вольмир, 1967], причем в случае консервативной системы результаты всех трех методов расчета совпадают, а сам факт совпадения для конкретной задачи считается проверкой правильности ее решения. Равновесная дисковидная двояковогнутая форма эритроцита может соответствовать

минимуму упругой энергии изгиба мембраны при заданных площади ее поверхности и ограничивающем ею объеме [Canham, 1970]. Однако из-за ненадлежаще проведенного сравнения теории с экспериментальными данными [Marchenko, Podolyak, 2015] эта модель в дальнейшем неоправданно усложнялась учетом спонтанной кривизны [Deuling, Helfrich, 1976], нелокального взаимодействия, сдвиговой упругости мембраны и цитоскелета [Mukhopadhyay, 2002]. В работе Марченко и Подоляк [Marchenko, Podolyak, 2015] показано, что принцип [Canham, 1970] количественно описывает наблюдаемую форму эритроцита без введения новых материальных параметров мембраны, неизвестных из опыта и поэтому являющихся по сути подгоночными. Следует отметить, что нелинейность соответствующих вариационных задач с неизбежностью обуславливает необходимость использования численных методов. Например, краевая задача для вариационного уравнения решается численным интегрированием методом стрельбы [Marchenko, Podolyak, 2015]. С этой точки зрения не проигрышным будет нахождение формы эритроцита в исходной постановке из минимизации упругой энергии изгиба мембраны при заданных площади поверхности и объеме эритроцита без сведения экстремальной задачи к вариационному уравнению. Такая постановка соответствует задаче условной нелинейной оптимизации, реализованной хорошо развитыми, апробированными и эффективными численными методами, например, в пакете Matlab [Messac, 2015]. Однако более существенным и значимым доводом для реализации такого подхода является оценка применимости принципа [Canham, 1970] для эритроцита, деформированного в результате внешнего воздействия.

Поэтому цель данной работы разработать, реализовать, апробировать и продемонстрировать возможности оптимизационной модели стационарной формы эритроцита.

Метод исследования

В данной работе стационарные формы эритроцита определяются в двумерном приближении в результате решения соответствующим образом сформулированных условных нелинейных задач оптимизации, а именно минимизации нелинейной целевой функции с линейными и нелинейными ограничениями, выбор и задание которых зависит от поставленных внешних для эритроцита условий.

В отсутствие внешних воздействий равновесная форма двумерного эритроцита – это замкнутая плоская упругая кривая L , которая минимизирует целевую функцию – упругую энергию изгиба этой кривой:

$$E_b = \frac{1}{2} B \oint_L \kappa^2 dl, \tag{1}$$

где E_b – упругая энергия изгиба, B – изгибная жесткость, κ – кривизна элемента dl плоской кривой.

Ограничения на искомую кривую ставятся в виде условий заданной площади S_0 , ею ограниченной, и заданного ее периметра L_0 :

$$S = S_0, \quad L = L_0, \tag{2}$$

которые соответствуют в двумерном приближении наблюдаемым свойствам неизменности объема и площади поверхности эритроцита.

Структура (1) и исключительно геометрический характер ограничений (2) обуславливают независимость искомой упругой кривой от значения B ее изгибной жесткости; значением B определяется только абсолютная величина E_b упругой энергии ее минимизирующей формы.

Для решения оптимизационной задачи (1, 2) необходимо, прежде всего, определиться со способом задания плоской кривой, которым конкретизируются вектор-аргумент целевой функции (1) и ограничений (2) на него.

В данной работе искомая непрерывная кривая L аппроксимируется дискретным набором из N точек с радиус-векторами \vec{r}_i (здесь и везде далее $i=1,2,\dots,N$). Тогда аргумент целевой функции – это вектор длины $2N$, составленный из всех \vec{r}_i . Геометрическая интерпретация такой аппроксимации соответствует замене плоской кривой замкнутой ломаной (многоугольником), составленным из замкнутой цепочки векторов $\vec{l}_i = \vec{r}_{(1-[i/N])i+1} - \vec{r}_i$ с фиксированной длиной $|\vec{l}_i| = l_0 = L_0/N$ (рис. 1). Здесь $[i/N]$ – неполное частное, поэтому $(1-[i/N])i+1 = \begin{cases} i+1, & \text{for } i < N \\ 1, & \text{for } i = N \end{cases}$, что учитывает периодичность индекса i . Тогда из «скоростного» смысла кривизны как отношения угла поворота орта касательной при смещении его начала на dl вдоль кривой к dl в используемом приближении кривой (рис. 1) следует, что

$$\kappa_i = \theta_i / l_0, \quad \cos \theta_i = \vec{l}_{i-1} \cdot \vec{l}_i / l_0^2 \quad (3)$$

а ограничения (2) на вектор-аргумент представляются равенствами:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\vec{e}_y \cdot (\vec{r}_{(1-[i/N])i+1} + \vec{r}_i)] (\vec{e}_x \cdot \vec{l}_i) = S_0, \quad |\vec{l}_i| = l_0, \quad (4)$$

где \vec{e}_x, \vec{e}_y – орты декартовой системы координат.

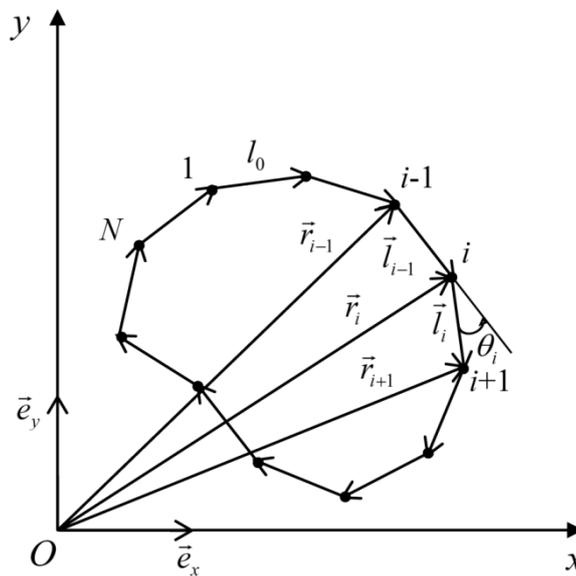


Рис. 1. Аппроксимация двумерной формы эритроцита N -угольником
Fig. 1. Approximation of the two-dimensional shape of the erythrocyte by a polygon

Окончательно оптимизационная задача (1–2) с учетом дискретизации (3–4) записывается в координатном виде как минимизация целевой функции:

$$E_b(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{2} E_{b0} \sum_{i=1}^N \theta_i^2, \quad (5)$$

где $\cos\theta_i = [(x_i - x_{i-1})(x_{(1-\lfloor i/N \rfloor)_{i+1}} - x_i) + (y_i - y_{i-1})(y_{(1-\lfloor i/N \rfloor)_{i+1}} - y_i)]/l_0^2$, $E_{b0} = B/l_0$ – характерное значение упругой энергии изгиба с ограничениями

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_{(1-\lfloor i/N \rfloor)_{i+1}} + y_i)(x_{(1-\lfloor i/N \rfloor)_{i+1}} - x_i) = S_0; \quad (x_{(1-\lfloor i/N \rfloor)_{i+1}} - x_i)^2 + (y_{(1-\lfloor i/N \rfloor)_{i+1}} - y_i)^2 = l_0^2. \quad (6)$$

Здесь x_i, y_i – абсцисса и ордината i -й вершины N -угольника.

Оптимизация осуществляется численно в пакете Matlab.

Результаты исследования

Равновесная форма эритроцита доставляется решением оптимизационной задачи (5 – 6), значения параметров в которой после задания числа N вершин многоугольника выбираются равными: $l_0 = L_0/N$ – длина стороны N -угольника; $L_0 = 2\pi R_0$ – периметр двумерного эритроцита, равный длине окружности радиуса $R_0 = 3 \mu\text{m}$; $S_0 = s_* \pi R_0^2$ – площадь эритроцита, которая составляет только часть ($s_* = 0.46$) максимально возможной площади, ограниченной замкнутой кривой с периметром L_0 – круга радиуса R_0 . Такой набор значений устанавливается из соответствия L_0 и S_0 двумерного эритроцита аналогичным характеристикам осевого сечения усредненного осесимметричного эритроцита (рис. 2) – экспериментально наблюдаемой формы, полученной в работе [Evans, Fung, 1972] путем усреднения измерений геометрических размеров нормального эритроцита и представленной в виде формулы, образующей форму линии в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$\bar{z}(\bar{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \bar{r}^2} (c_0 + c_1 \bar{r}^2 + c_2 \bar{r}^4), \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1,$$

где $c_0 = 0.207161$; $c_1 = 2.002558$; $c_2 = -1.122762$ – эмпирические константы усреднения измерений; $\bar{r} = r/R_*$, $\bar{z} = z/R_*$ – безразмерные цилиндрические координаты, нормированные на радиус $R_* = 3.91 \mu\text{m}$ эритроцита; $\bar{z}(\bar{r})$ – это половина образующей, которая дополняется ее зеркальным отражением относительно радиальной оси.

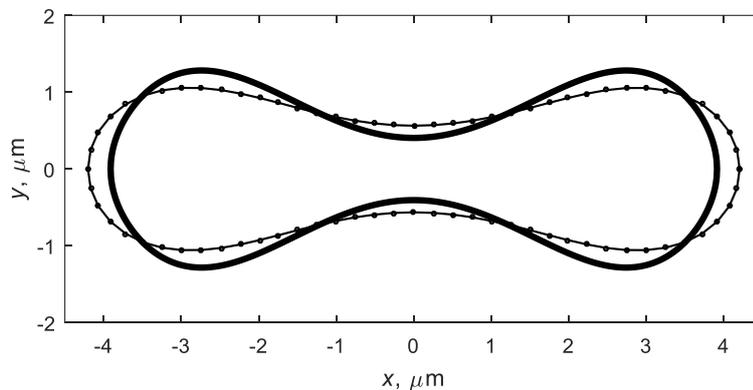


Рис. 2. Равновесная форма эритроцита: наблюдаемая (сплошная кривая) по данным [Evans, Fung, 1972] и расчетная (тонкая кривая с $N = 76$ узлами) по модели (5–6) при $s_* = 0.46$.

Fig. 2. The equilibrium shape of the erythrocyte: observed (solid curve) [Evans, Fung, 1972] and predicted (thin curve with $N = 76$ nodes) by the model (5–6) for $s_* = 0.46$.



Результаты расчета для $N = 76$ (таким часто задается число мезоскопических частиц при динамическом описании двумерной формы эритроцита [Barns et al., 2017]) представлены на рис. 2. Видно, что равновесная форма качественно соответствует экспериментально наблюдаемой, а количественно – рассчитанные радиус и толщина в центре вогнутости эритроцита завышены не более чем на 10 и 30 % соответственно. Аналогичного качества результаты получаются и при динамическом описании двумерной формы эритроцита [Nayanajith et al., 2016].

Влияние числа вершин аппроксимирующего форму эритроцита многоугольника, которое оценивается тестовыми расчетами с увеличенным и уменьшенным в два раза значением $N = 76$, оказывается несущественным, так как результаты расчета изменяются мало настолько, что визуально практически неразличимы на рис. 2.

При динамическом описании двумерной формы эритроцита упругая энергия изгиба N одинаковых упруго-связанных мезоскопических частиц рассчитывается по формуле [Barns et al., 2017]:

$$E_b = \frac{1}{2} k_b \sum_{i=1}^N \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\theta_i}{2} \right), \quad (7)$$

где k_b – упругая константа деформации изгиба.

Результаты тестового расчета с целевой функцией (7) и релаксации упруго связанной системы мезоскопических частиц при динамическом описании мембраны [Голочалова, 2017] согласовываются между собой и с равновесной формой, приведенной на рис. 2, для $s_* = 0.46$, до визуальной неразличимости в масштабе рисунка.

Формоизменение эритроцита под действием осмотического давления. Изменение формы эритроцита в зависимости от параметра $s_* = \{0.3; 0.7; 0.9\}$ иллюстрируется на рис. 3. Видно, что радиус эритроцита уменьшается, а его толщина в центре вогнутости увеличивается с ростом s_* , причем сама вогнутость реализуется в диапазоне значений s_* , ограниченном сверху значением между 0,7 и 0,9. Поскольку s_* задает фактический «недобор» площади двумерного эритроцита от максимально возможной площади, ограниченной замкнутой кривой с тем же периметром, то влияние увеличения (уменьшения) s_* на результаты расчета интерпретируются как формоизменение эритроцита при его осмотическом набухании (сжимании). Аналогичные результаты получаются и при динамическом описании мембраны эритроцита [Nayanajith et al., 2016].

Формоизменение эритроцита при капиллярной аспирации. Рассматривается формоизменение эритроцита при его «засасывании» в капиллярный канал. В оптимизационной модели аспирация и капилляр формируются дополнительными к (6) ограничениями:

$$y_{n-1} = d; \quad x_n = 0; \quad y_{n+1} = d; \quad (8a)$$

$$y_i x_i^{2k} - c \leq 0, \quad (8б)$$

где n – номер вершины N -угольника, совпадающей с центром вогнутости формы эритроцита в исходном положении, d – глубина проникновения в капилляр соседних с ней $(n-1)$ и $(n+1)$ -й вершин при аспирации, k, c – параметры геометрии стенок капилляра, которые задают фактическую область определения аппроксимирующего эритроцит N -угольника.

Результаты расчета формоизменения эритроцита при его «засасывании» в капилляры с параметрами $k = 5, c = 5$ и $c = 5 \cdot 10^3$ приводятся на рис. 4 и 5 соответственно.

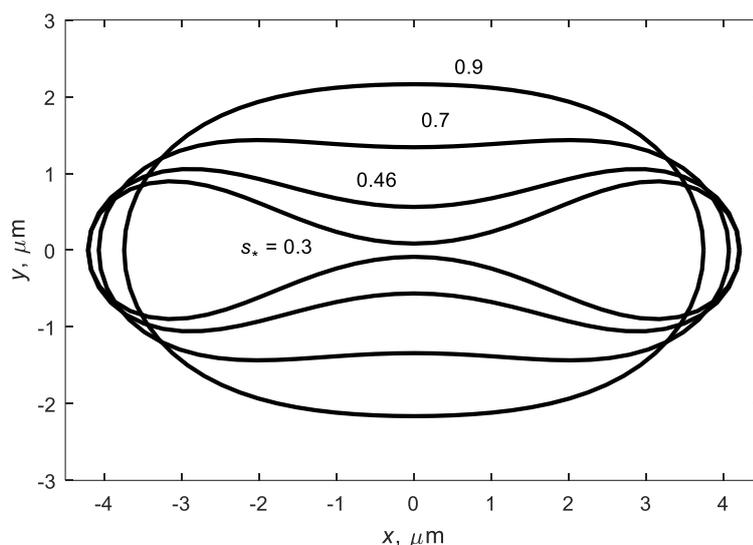


Рис. 3. Стационарная форма эритроцита при $s_* = 0,3; 0,46; 0,7; 0,9$

Fig. 3. The stationary shapes of the erythrocyte for $s_* = 0,3; 0,46; 0,7; 0,9$

Перед аспирацией оптимизационная модель (5–6, 8б) доставляет равновесную, недеформированную, форму эритроцита в нижней полуплоскости. Эритроцит только касается образующих капилляр горизонтальных стенок (рис. 4 а, 5 а). Это положение эритроцита считается исходным перед его проникновением в капилляр.

При аспирации оптимизационная модель (5–6, 8а, 8б) определяет форму эритроцита для каждой заданной глубины его проникновения в капилляр (рис. 4 б–f; 5 б–f). Видно, что изменение формы зависит от размера капилляра. В узком капилляре (с шириной около $2 \mu\text{m}$) вначале, при $d \leq 3.3 \mu\text{m}$, формируется звездчатая (трехконечная) форма эритроцита (рис. 4 б–d). При дальнейшем углублении на $0.1 \mu\text{m}$ форма эритроцита становится снова двояковогнутой, как и в исходном положении в недеформированном состоянии перед аспирацией (рис. 4а), но повернутой на $\pi/2$ (рис. 4е). Далее, при $d > 3.4 \mu\text{m}$, эритроцит «углубляется» торцом и форма его не изменяется (рис. 4f).

В более широком капилляре (с шириной около $4 \mu\text{m}$) с самого начала реализуется куполообразная форма (или форма парашюта) эритроцита (рис. 5b). С увеличением d она деформируется к подковообразной (рис. 5 с–f), а далее качественной перестройки формы при аспирации эритроцита в такой капилляр не наблюдается.

Приведенные результаты расчета формоизменения эритроцита при капиллярной аспирации качественно согласовываются с наблюдениями, которые показывают, что при движении в узких капиллярах эритроциты принимают форму парашюта или трубки, движущейся торцом [Skalak, Branemark, 1969].

Заключение

Разработана и реализована оптимизационная модель для расчета двумерной стационарной формы эритроцита в норме. Модель опирается на известный принцип минимума упругой энергии изгиба мембраны, который в двумерном случае формулируется для плоской замкнутой упругой кривой и дополняется ограничениями в виде условий заданных значений ее периметра и ограниченной ею площади. Численная реализация осуществляется в исходной постановке задачи условной нелинейной оптимизации. Результаты согласовываются качественно с экспериментально наблюдаемой

формой эритроцита в норме и количественно с динамическими расчетами релаксации формы эритроцита методом упруго-связанных частиц в двумерном приближении.

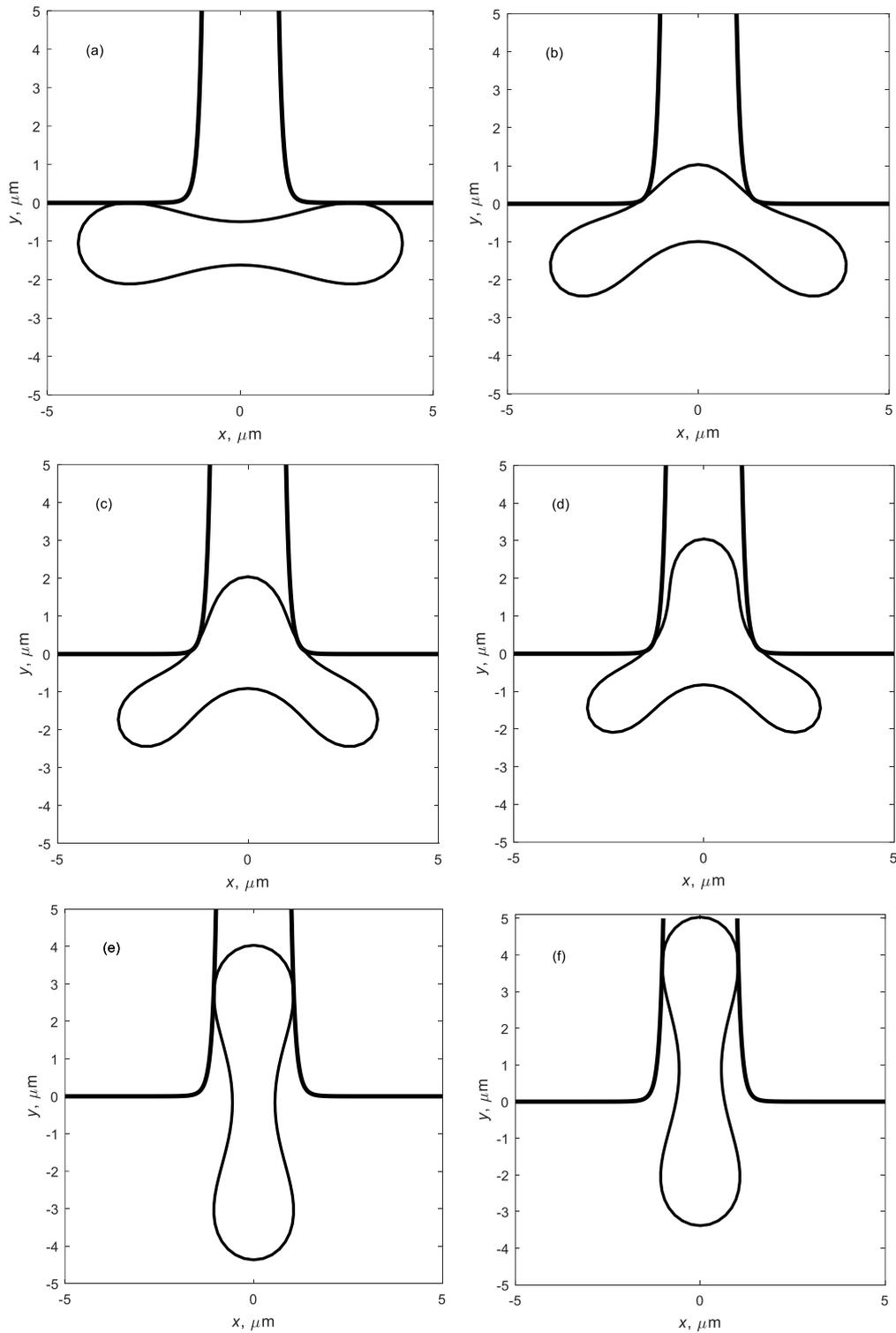


Рис. 4. Форма эритроцита перед (а) и при аспирации в зависимости от глубины проникновения $d = 1$ (b); 2 (c); 3 (d); 4 (e); 5 (f) μm в капилляр (8б) с параметрами $k = 5, c = 5$.

Fig. 4. The shape of the erythrocyte before (a) and during aspiration on the depth of penetration $d = 1$ (b); 2 (c); 3 (d); 4 (e); 5 (f) μm in the capillary (8b) with parameters $k = 5, c = 5$.

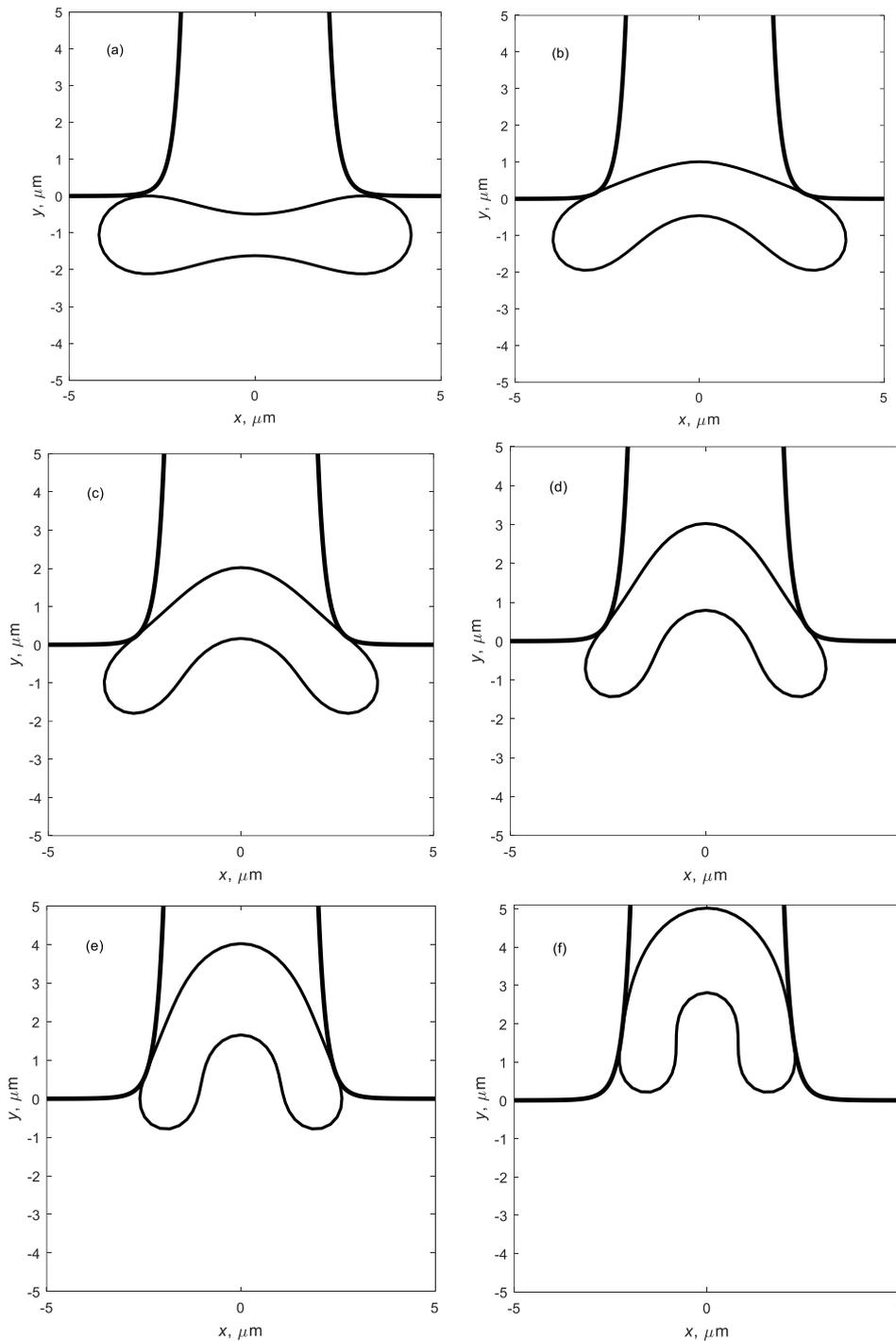


Рис. 5. Форма эритроцита перед (а) и при аспирации в зависимости от глубины проникновения $d = 1$ (b); 2 (c); 3 (d); 4 (e); 5 (f) μm в капилляр (8б) с параметрами $k = 5, c = 5 \cdot 10^3$.

Fig. 5. The shape of the erythrocyte before (a) and during aspiration on the depth of penetration $d = 1$ (b); 2 (c); 3 (d); 4 (e); 5 (f) μm in the capillary (8б) with parameters $k = 5, c = 5 \cdot 10^3$.

Продемонстрирована возможность применимости принципа минимума упругой энергии изгиба замкнутой упругой кривой для нахождения стационарных форм эритроцита в двумерном приближении при наличии внешних воздействий. Результаты расчетов формы эритроцита, деформированного под действием осмотического давления или капиллярной аспирации, качественно соответствуют данным наблюдений. Для

повышения адекватности и практической значимости оптимизационной модели формы эритроцита необходимо ее обобщение на трехмерный случай. В этом направлении развития исследования наиболее последовательным и простым представляется расширение пригодности представленной модели для расчета стационарных осесимметричных форм эритроцита.

Список литературы References

1. Атауллаханов Ф.И., Борсакова Д.В., Протасов Е.С. и др. 2018. Эритроцит: мешок с гемоглобином или живая, активная клетка? Вопросы гематологии/онкологии и иммунопатологии в педиатрии. 17(1): 108 – 116.
Ataullakhanov F.I., Borsakova D.V., Protasov E.S. i dr. 2018. Eritrotsit: meshok s gemoglobinom ili zhivaya, aktivnaya kletka? Voprosy gematologii/onkologii i immunopatologii v pediatrii. 17(1): 108 – 116.
2. Вольмир А.С. 1967. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 984.
Vol'mir A.S. 1967. Ustoychivost' deformiruemyykh sistem. – М.: Nauka, 984.
3. Голочалова А.В. 2017. Особенности расчета двумерной формы эритроцита человека методом частиц. Естественнаучные, инженерные и экономические исследования в технике, промышленности, медицине и сельском хозяйстве. Материалы I молодежной научно-практической конференции с международным участием. – Белгород ИД «Белгород» НИУ «БелГУ», 409 – 412.
Golochalova A.V. 2017. Osobennosti rascheta dvumernoy formy eritrotsita cheloveka metodom chastits. Estestvennonauchnye, inzhenernye i ekonomicheskie issledovaniya v tekhnike, promyshlennosti, meditsine i sel'skom khozyaystve. Materialy I molodezhnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem. – Belgorod ID «Belgorod» NIU «BelGU», 409 – 412.
4. Barns S. et al. 2017. Investigation of red blood cell mechanical properties using AFM indentation and coarse-grained particle method. BioMedical Engineering OnLine. 16:140.
5. Canham P.B. 1970. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. J. Theor. Biol. 26(1): 61–81.
6. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. 1978. The mechanics of the circulation. Oxford: Oxford University Press, 527.
7. Deuling H.J., Helfrich W. 1976. Red blood cell shapes as explained on the basis of curvature elasticity. Biophysical Journal. 16(8): 861–868.
8. Evans E., Fung Y.-C. 1972. Improved measurements of the erythrocyte geometry. Microvascular Research. 4(4): 335 – 347.
9. Herman I.P. 2007. Physics of the Human Body. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 992.
10. Ju M. et al. 2015. A review of numerical methods for red blood cell flow simulation. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. 18(2): 130–140.
11. Marchenko V.I., Podolyak E.R. 2015. On the equilibrium shape of erythrocytes. JETP. 120(4): 751 – 752.
12. Messac A. 2015. Optimization in practice with Matlab. – Cambridge University Press, 465.
13. Mukhopadhyay R., Lim H.W.G., Wortis M. 2002. Echinocyte Shapes: Bending, Stretching, and Shear Determine Spicule Shape and Spacing. Biophysical Journal. 82(4): 1756–1772.
14. Nayanajith P.G.H. et al. 2016. A coupled SPH-DEM approach to model the interactions between multiple red blood cells in motion in capillaries. International Journal of Mechanics and Materials in Design. 12(4): 477–494.
15. Pivkin I.V., Karniadakis G.E. 2008. Accurate coarse-grained modeling of red blood cells. Phys. Rev. Lett. 101(11): 118105.
16. Pozrikidis C. 2001. Effect of membrane bending stiffness on the deformation of capsules in simple shear flow. J Fluid Mech. 440: 269 – 291.
17. Skalak R., Branemark P.-I. 1969. Deformation of Red Blood Cells in Capillaries. Science 164(3880):717–719.

УДК 523.6

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-145-156

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ С МАССИВНЫМИ ЗВЕЗДАМИ

NUMERICAL SIMULATION OF THE ENCOUNTERS OF THE SOLAR SYSTEM WITH MASSIVE STARS

А.М. Заболоцкий
A.M. Zabolotskiy

Белгородский государственный аграрный университет им. В.Я. Горина
Россия, 308503, г. Белгород, п. Майский, ул. Вавилова, 1

Belgorod State Agricultural University named after V. Gorin,
1 Vavilov St., Mayskiy, Belgorod, 308503, Russia

E-mail: zabolotskiy.bel@rambler.ru

Аннотация

Рассматривается задача моделирования сближения Солнечной системы с массивной звездой на основе численного интегрирования уравнений движения объектов облака Оорта. На основе полученных результатов установлено, что столкновение со звездой увеличивает дисперсию эксцентриситетов орбит, что влечет за собой, с одной стороны, потерю значительной части объектов облака Оорта из-за их перехода на гиперболические орбиты, а с другой – к появлению орбит с малым эксцентриситетом и большими полуосями порядка 30 000 а. е. Столкновение с массивной звездой приводит к возникновению анизотропии направлений больших полуосей орбит с преимущественной ориентацией перигелиев орбит к точке максимального сближения звезды с Солнечной системой.

Abstract

The problem of modeling the approach of the Solar system to a massive star on the basis of numerical integration of the equations of motion of objects of the Oort cloud is considered. On the basis of the obtained results, it is found that the collision with a star increases the dispersion of orbit eccentricities, which entails, on the one hand, the loss of a significant part of the objects of the Oort cloud due to their transition to hyperbolic orbits, and on the other-to the appearance of orbits with small eccentricity and large semi – axes of the order of 30,000 a. e. A collision with a massive star results in anisotropy of the directions of the large semi-axes of the orbits with the predominant orientation of the perihelion orbits to the point of maximum convergence of the star with the Solar system.

Ключевые слова: облако Оорта, метод Рунге-Кутты, долгопериодические кометы.

Keywords: Oort cloud, Runge-Kutta method, long-period comets.

Введение

Исследованию близких прохождений соседних звезд около Солнечной системы посвящено множество работ. Это важно для понимания динамики объектов облака Оорта,



так как внешнее гравитационное воздействие на него может оказать влияние на поток квазипараболических комет с малыми перигелиями. Возможность столкновения Земли с такой кометой – один из факторов, влиянием которого можно объяснить катастрофические изменения климата, имевшие место в прошлом [Mullari, 1996, p. 19]. В работе Рикмана [Rickman, 2008] показано, что наряду с возмущениями облака Оорта, вызванными галактическими приливами, фундаментальную роль для инъекции комет из облака Оорта на наблюдаемые орбиты играют возмущения от близко проходящих звезд.

Одно из первых таких исследований – работа оксфордского астронома Matthews R.A.J [1994]. Он нашел 4 звездных системы, которые в ближайшие несколько десятков тысяч лет приблизятся к нам ближе 1 парсека: Проксима и α Cen, Ross 248 и AC+79 3888 (Gl 445). В статье российских астрономов Муллари А.А. [Mullari, 1996] и Орлова В.В. опубликованы результаты исследования 1946 звезд ближе 20 парсек из каталога Глизе [ARI Data Base...], в результате которого установлено, что одна из звезд, имеющая близкий подход к Солнцу – звезда Gl 473, сблизится с Солнцем на минимальное расстояние около 60 000 а. е. через 7 500 лет. Здесь же была отмечена также и звезда Gl 710, сближение с которой, согласно работе Муллари А.А. и Орлова В.В., произойдет примерно через 10^6 лет на расстояние $2,8 \times 10^5$ а. е. Однако эти результаты были основаны на данных каталога Глизе о параллаксах и лучевых скоростях, полученных в результате наземных наблюдений. Как было показано, случайные ошибки астрометрических данных заметно влияют на минимальное расстояние и момент наибольшего сближения звезды с Солнечной системой [Bobylev, 2010, 2017]. Существенный прогресс в этой области был достигнут с появлением более точного каталога, основанного на данных, собранных с помощью астрометрического спутника Hipparcos. Из анализа данных каталога Hipparcos сделан вывод о том, что на интервале около 10 млн лет наиболее тесное сближение произойдет со звездой Gl 710 на минимальное расстояние 0,4 пс через 1,4 млн лет [Garsia-Sanchez, 1999]. В этой же работе отмечено еще одно, не менее значимое сближение по силе воздействия на облако Оорта, которое имело место в прошлом. Это звезда Алголь) – тройная звездная система с полной массой $5,8 M_{\odot}$, которая приблизилась к Солнцу на расстояние 2,4 пс 6,9 млн лет назад. Наиболее тесное сближение, известное в настоящее время, произошло 70 000 лет назад со звездой Шольца (WISE J072003.20-084651.2), которая пересекла облако Оорта на расстоянии около 52 000 а. е. от Солнца [Marcos, 2018, p. 5]. Это маломассивная двойная система, состоящая из красного карлика спектрального класса M9 и коричневого карлика класса T5, расположенная в ближайшей окрестности Солнца на расстоянии ~ 6 пс [Mamajek, 2015].

Оценки показывают, что такие сближения Солнечной системы со звездами происходят достаточно часто в сравнении со временем её существования, примерно 1 раз в 200 тыс. лет [Заболоцкий, 2017, с. 43]. Однако в большинстве случаев – это сближения с маломассивными звездами с массой менее $1 M_{\odot}$. Существенный интерес представляют собой столкновения со звездами массой порядка нескольких солнечных масс. Согласно каталогу ближайших звезд Glise [ARI Data Base...], в окрестности Солнца на расстоянии ≤ 27 пс есть три звездные системы, массы которых превосходят 5 солнечных масс M_{\odot} : α Aur, η Oph и δ Vel.

α Aur (Капелла) – спектрально-двойная звезда с массами компонент $(2,69 \pm 0,06) M_{\odot}$ и $(2,56 \pm 0,04) M_{\odot}$ [Hummel, 1994, p. 1859]. Расстояние между компонентами – 10^8 км.

η Oph – визуально-двойная система с общей массой компонент $(6,09 \pm 0,45) M_{\odot}$ [Docobo, 2007, p. 1211].

δ Vel состоит из двух звезд, каждая из которых является визуально-двойной звездой. Самая яркая из них δ Vel A – звезда главной последовательности, спектральный тип A0 V [ARI Data Base...]. Второй компонент δ Vel B – желтый карлик. Вторая звезда

также состоит из двух слабых звезд δ Vel C и δ Vel D. В 2000 г. было установлено, что δ Vel A – затменно-переменная звезда с компонентами δ Vel Aa и δ Vel Ab [Otero, 2000]. Согласно [Kervella, 2009, p. 112], массы компонент δ Vel Aa, δ Vel Ab и δ Vel B составляют $(2,5 \pm 0,1) M_{\odot}$, $(2,0 \pm 0,1) M_{\odot}$ и $(1,3 \pm 0,1) M_{\odot}$ соответственно. Таким образом, масса системы δ Vel превосходит $5,8 M_{\odot}$, если еще учесть наличие двух маломассивных компонент δ Vel C и δ Vel D.

Эти звездные системы составляют всего лишь 0,26 % от числа всех звезд и звездных систем каталога Glise. Однако можно показать [Заболоцкий, 2017], что в среднем через каждые 76 млн лет облако Оорта пересекает звезда с массой более $5 M_{\odot}$, т.е. в истории существования Солнечной системы эти события происходили многократно, и их вклад в динамику объектов облака Оорта может быть сопоставим с воздействием более частых сближений с маломассивными звездами. В данной работе рассмотрены результаты численного моделирования столкновения звезды массой $6 M_{\odot}$ с облаком Оорта, выполнено сравнение статистических распределений параметров орбит малых тел (комет) до и после столкновения со звездой.

Постановка задачи и методы ее решения

Для моделирования динамики объектов облака Оорта была разработана компьютерная программа Gravitation Systems [Заболоцкий, 2018], в которой численное интегрирование уравнений движения выполнялось на основе явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка с адаптацией шага интегрирования [Ильина, 2004; Хайрер, 1990]. Алгоритм выбора шага интегрирования h_k для момента времени t_k (где $k = 0, 1, 2, \dots$) основан на использовании параметра адаптации δ , текущее значение δ_k которого определено выражением

$$\delta_k = \max_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \frac{v_{ik} h_k}{r_{ijk}},$$

где v_{ik} – модуль вектора скорости i -го объекта в момент t_k , r_{ijk} – расстояние между объектами i и j в момент времени t_k . Для каждого k шаг интегрирования h_k определяется из условия $\delta_k \leq \delta$. Заметим, что если $\delta_k \ll 1$, то при круговом движении частицы с массой $m_1 \ll m_2$ вокруг барицентра системы двух тел величина δ_k – угол, описываемый ее радиус-вектором на интервале времени $[t_k, t_{k+1}]$ с вершиной в центре тяжести. Таким образом, посредством задания параметра δ осуществляется управление точностью и временем вычислений. Программа моделирует также возможные столкновения объектов как абсолютно неупругий удар, в результате которого сталкивающиеся объекты объединяются в один. Еще один параметр – радиус системы, определяет первоначально область локализации объектов. В дальнейшем при выполнении процедуры интегрирования он становится параметром процесса, определяемым наиболее удаленным от барицентра системы объектом с отрицательной полной энергией. Если какое-либо тело с положительной полной энергией пересекает границу системы, удаляясь от барицентра, то оно исключается из системы. Естественно, что интегрирование уравнений движения большого числа объектов в задаче N тел требует существенных затрат машинного времени. Поэтому в программе реализован многопоточный алгоритм обработки данных.

Для исследования было взято 5000 объектов в шаре радиуса 60 000 а. е. с центром в начале прямоугольной системы координат, совмещенным с барицентром Солнечной системы. С целью учета планетных возмущений в состав модельной Солнечной системы, кроме Солнца, включены планеты-гиганты, исключая планеты земной группы и карликовые планеты, т.к. их влиянием на динамику объектов облака Оорта можно пренебречь [Бирюков, 2007]. Начальные координаты малых тел выбирались случайным

образом при условии их равномерного распределения по расстоянию от барицентра. Компоненты начальных скоростей объектов нормально распределены с нулевым средним и стандартным отклонением v_σ , при этом значение v_σ задано так, чтобы эксцентриситеты e орбит находились в интервале $0,7 \leq e \leq 1$.

Выбор этих параметров приводит к распределению орбит по большой полуоси a , качественно согласующимся с распределением по параметру $1/a$ для долгопериодических комет [Dones, 2004]. Отличие нашего распределения от распределения наблюдаемых комет состоит, прежде всего, в том, что в начальных данных нашей модели отсутствуют гиперболические орбиты, для которых параметр $1/a < 0$. Поэтому предварительно было выполнено моделирование движения долгопериодических комет на интервале времени 10^6 лет. Это привело в результате взаимодействия с планетами-гигантами к появлению 110 гиперболических орбит, что составляет 2,2 % от общего количества объектов. В результате распределение орбит по эксцентриситету e и большой полуоси a приняло вид, показанный на рис. 1. Наклонения орбит i равномерно распределены по $\cos i$ в пределах $(-1, 1)$. Такое же распределение в пределах $(0^\circ, 360^\circ)$ имеет долгота восходящего узла Ω .

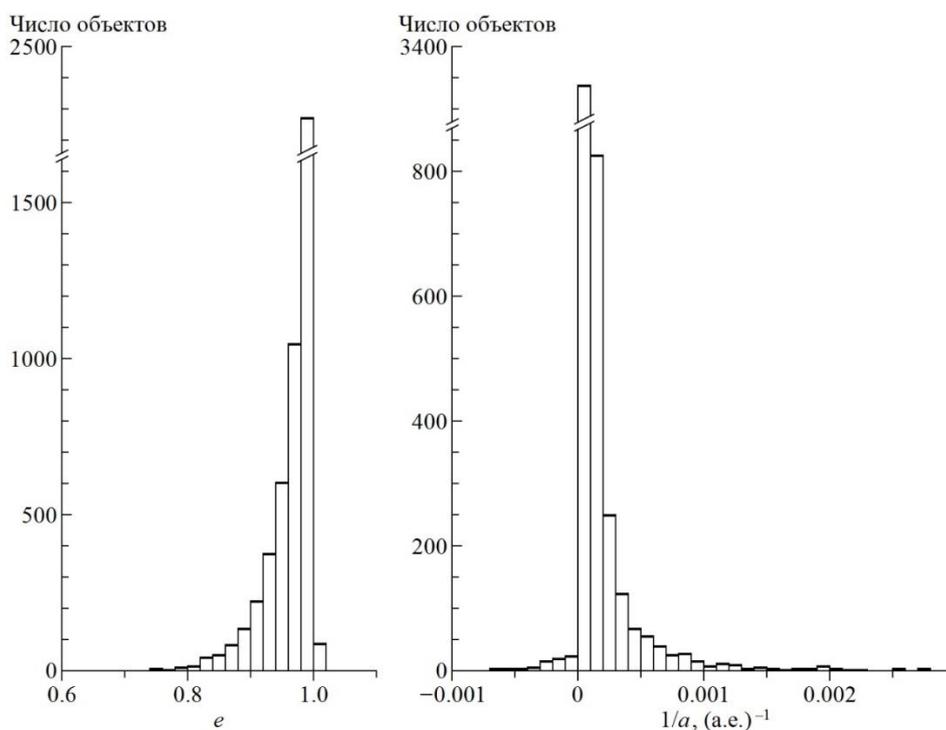


Рис. 1. Распределение орбит по эксцентриситету e и большой полуоси a в начальных условиях
 Fig. 1. The distribution of orbits along the eccentricity e and the semi major axis a in the initial conditions

Для моделирования столкновения с облаком Оорта была выбрана звезда массой $6M_\odot$. Её начальная скорость варьировалась в интервале от 5 км/с до 30 км/с, а прицельное расстояние – в диапазоне от 10 000 а. е. до 25 000 а. е. Выбор этих значений прицельных расстояний обусловлен тем, насколько вероятно такое сближение с Солнечной системой. Вероятность того, что за всю историю существования Солнечной системы произойдет, по крайней мере, одно сближение со звездой массы $\geq 5M_\odot$, на расстояние $\leq 10\,000$ а. е., равна 0,45 [Заболоцкий, 2017, с. 43]. Для расстояния $\leq 25\,000$ а. е. сближения происходят в среднем один раз в 1,2 млрд лет, а вероятность хотя бы однократного такого события равна 0,98. Естественно это справедливо, если состав и плотность звездного населения в окрестности Солнца были постоянными на протяжении рассматриваемого интервала

времени. Начальное положение звезды выбиралось в случайной точке на расстоянии 500 000 а. е. от Солнца. Моделирование столкновения выполнялось до момента удаления звезды от Солнца на это же расстояние.

Результаты и их обсуждение

Численное моделирование столкновений показало наиболее существенные изменения в распределении орбит по параметрам a , e , i и Ω при начальной скорости звезды 5 км/с и наименьшем расстоянии от Солнца, равном 10 000 а. е. Здесь будут рассмотрены результаты численного эксперимента, выполненные с этими начальными условиями.

На рис. 2 показано распределение орбит по большой полуоси a после столкновения. Как можно видеть из его сравнения с начальным распределением орбит на рис. 1, столкновение привело к значительному увеличению числа гиперболических орбит. Если до столкновения в системе было 110 объектов на гиперболических орбитах, то теперь их число возросло до 1 646. Как следствие, медиана распределения возросла от 15 290 а. е. до 29 070 а. е. Кроме этого, заметно уменьшилась величина пика распределения у нулевого значения параметра $1/a$, что объясняется увеличением дисперсии значений этой величины.

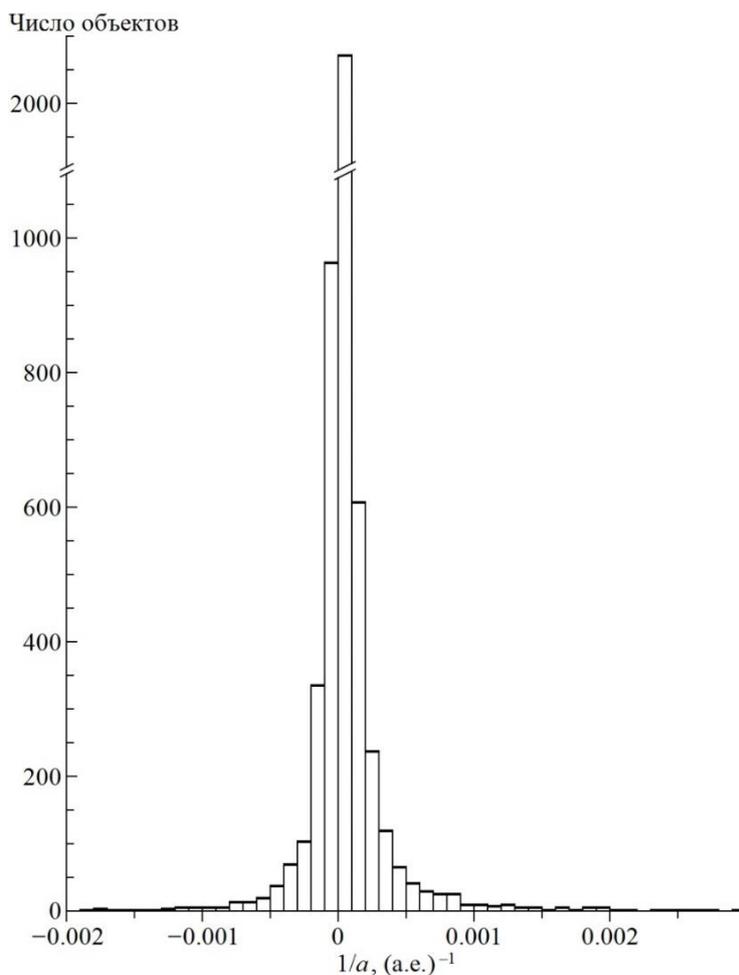


Рис. 2. Распределение орбит по большой полуоси a после столкновения
 Fig. 2. The distribution of the orbits the semi major axis a after the collision

Еще более значительное увеличение разброса значений произошло у эксцентриситетов орбит. На рис. 3 показано распределение орбит по эксцентриситету e после столкновения для диапазона значений $0 \leq e \leq 1,4$. Однако это только $\sim 80\%$ от первоначального количества объектов. У остальных 1035 объектов параметр $e > 1,4$ и его наибольшее значение составило 394. Таким образом, эксцентриситеты орбит после столкновения распределены в весьма широком диапазоне от нуля до нескольких сотен единиц.

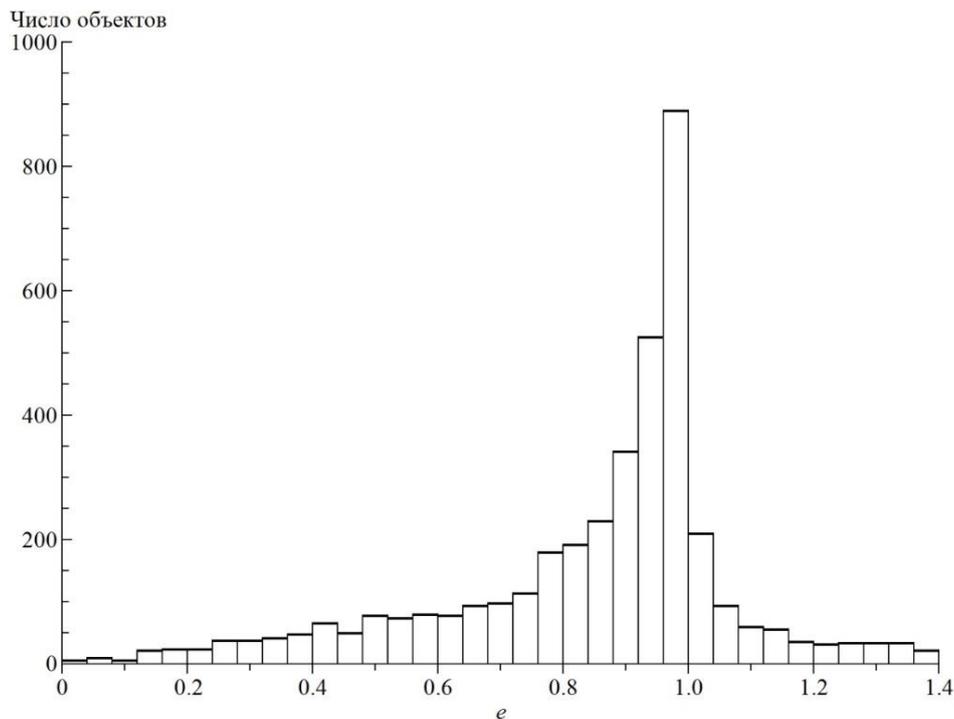


Рис. 3. Распределение орбит по эксцентриситету e после столкновения
 Fig. 3. The distribution of the orbits the eccentricity e after the collision

Пространственная ориентация орбит характеризуется наклонением i и долготой восходящего узла Ω . В случае изотропного распределения орбит параметры $\cos i$ и Ω равномерно распределены. После столкновения со звездой в зависимости от её массы, начальной скорости и прицельного расстояния распределения орбит по $\cos i$ и Ω существенно отличаются от равномерного распределения. На рис. 4 показано распределение объектов по наклонению i . Прерывистая линия – равномерное распределение. Как видим, имеет место избыток орбит с наклонением в интервале $(80^\circ, 120^\circ)$ и недостаток при $0^\circ < i < 50^\circ$ и $130^\circ < i < 180^\circ$. Аналогичные по величине отклонения от равномерного распределения имеют место и в распределении орбит по долготе восходящего угла.

Для понимания того, как связаны эти максимумы и минимумы распределений орбит по $\cos i$ и Ω с траекторией звезды и ориентацией осей орбит выполнено построение распределения объектов на небесной сфере через интервалы времени ~ 500000 лет. На рис. 5 показана композиция 4-х распределений объектов на небесной сфере, полученных после завершения моделирования столкновения. Отчетливо виден максимум плотности выше и правее центра изображения. Точки 1, 2 и 3 – радиант, положение звезды в момент максимального сближения и апекс звезды соответственно.

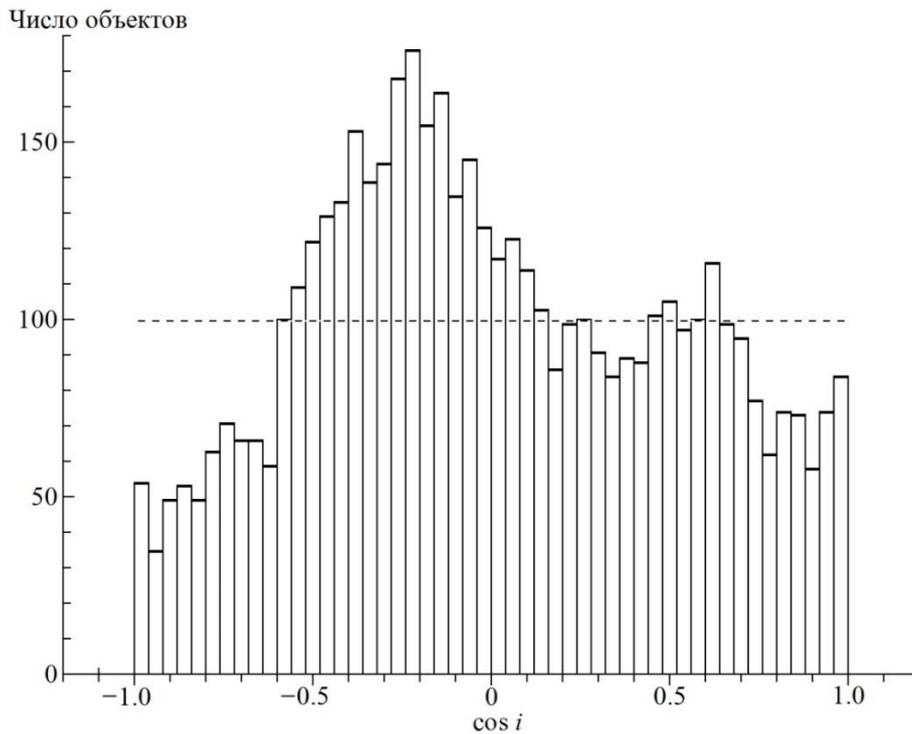


Рис. 4. Распределение орбит по наклонению i
 Fig. 4. The distribution of orbit inclination i

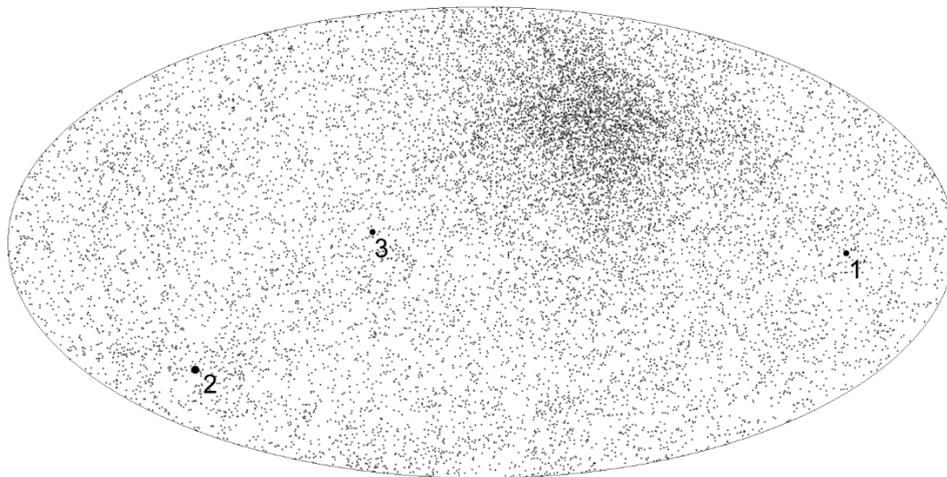


Рис. 5. Распределение объектов на небесной сфере: 1, 3 – радиант и апекс звезды, 2 – её положение в момент наибольшего сближения
 Fig. 5. Distribution of objects on the celestial sphere: 1, 3 – the radiant and apex of the star, 2-its position at the moment of greatest convergence

Полученное распределение может служить подтверждением того, что после столкновения афелии орбит концентрируются к определенной точке на небесной сфере. Действительно, около половины объектов ($\sim 48\%$), находящихся на эллиптических орбитах, имеют эксцентриситеты в интервале $0,9 < e < 1$. Следовательно, большую часть времени они находятся вблизи афелиев своих орбит. Как можно видеть из рис. 5, точка, противоположная максимуму плотности объектов,



расположена вблизи точки 2 наибольшего сближения со звездой. Соответственно, к этой точке обращены перигелии их орбит.

Оценим влияние гравитационного поля проходящей звезды на эксцентриситет орбит объектов облака Оорта. Как известно [Задача Кеплера..., 2006, с. 15], вектор эксцентриситета

$$\mathbf{e} = \frac{1}{mk}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \hat{\mathbf{r}} = \frac{m}{k}(\mathbf{v} \times \mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \hat{\mathbf{r}}, \quad (1)$$

где

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / r$$

– единичный вектор, \mathbf{v} – вектор скорости, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ – момент импульса \mathbf{p} , k – параметр, описывающий величину центральной силы, m – масса частицы. Рассмотрим орбиты с эксцентриситетом $e \approx 1$. Тогда $\mathbf{v} \times \mathbf{r} \approx \mathbf{o}$ и, следовательно,

$$\mathbf{e} \approx -\hat{\mathbf{r}}.$$

Предположим, что звезда с массой M движется по прямой со скоростью $v_0 \gg v$, проходя на минимальном расстоянии b от частицы. Под действием гравитационного поля звезды частица в момент времени t испытывает ускорение

$$\mathbf{a}(t) = \frac{GM}{r^3} \mathbf{r}' = \frac{GM}{b^2 + v_0^2 t^2} \hat{\mathbf{r}}'(t),$$

где

$$\hat{\mathbf{r}}'(t) = \mathbf{r}'(t) / r'(t),$$

$\mathbf{r}'(t)$ – вектор, направленный от объекта к звезде. Интегрируя это выражение, получим приращение скорости

$$\Delta \mathbf{v} = GM \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\mathbf{r}}'(t) dt}{b^2 + v_0^2 t^2}. \quad (2)$$

Пусть θ – угол между направлением на звезду и на точку максимального сближения частицы со звездой. Тогда $\text{tg} \theta = v_0 t / b$, а единичный вектор

$$\hat{\mathbf{r}}' = \mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta,$$

где $\sin \theta$ – его проекция на траекторию звезды. Тогда из формулы (2) находим

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{GM}{bv_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\mathbf{r}}'(t) d(v_0 t / b)}{1 + (v_0 t / b)^2} = \frac{GM}{bv_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta) d\theta = \frac{2GM}{bv_0} \mathbf{j}.$$

Далее с помощью формулы (1) определяем приращение вектора эксцентриситета:

$$\Delta \mathbf{e} = \frac{m}{k} \cdot \frac{4G^2 M^2}{b^2 v_0^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{r} \times \mathbf{j}), \quad (3)$$

где единичный вектор \mathbf{j} направлен от объекта в точку максимального сближения со звездой.

Поскольку для разных объектов облака Оорта векторы \mathbf{j} и \mathbf{r} ориентированы различным образом, то, согласно формуле (3), это приводит к увеличению дисперсии эксцентриситетов их орбит после прохождения звезды, что мы и видим из сравнения гистограмм на рис. 1 и 3. В других численных экспериментах, выполненных при больших значениях прицельного расстояния и скорости v_0 звезды, этот эффект менее выражен из-за сильной зависимости приращения эксцентриситета от параметров b и v_0 .

Прохождение массивной звезды через облако Оорта ведет к разрушению первоначального радиально симметричного распределения объектов, при этом наибольшее возмущение

орбит испытывают объекты, находящиеся в непосредственной близости от проходящей звезды. Это отчетливо можно видеть на рис. 5, а также на рис. 6, где показан вид облака Оорта «со стороны» до и после столкновения со звездой.

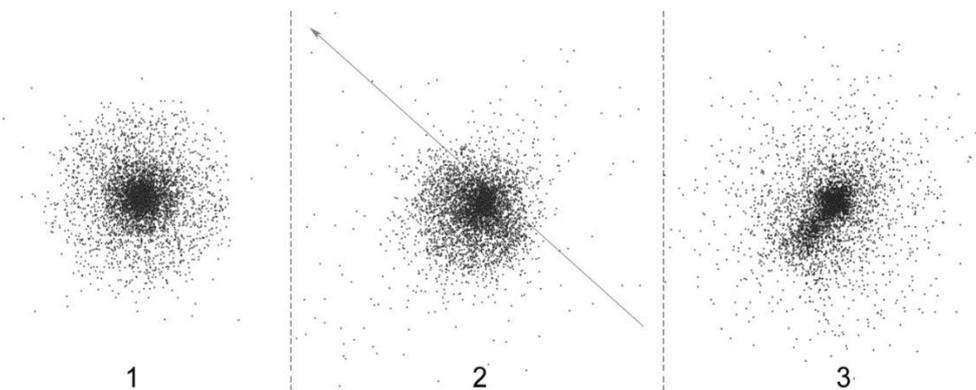


Рис. 6. Эволюция облака Оорта после столкновения: 1 – начальное распределение объектов; 2 – через 3.8×10^5 лет, 3 – через 1.6×10^6 лет после момента наибольшего сближения со звездой. Стрелкой показана траектория звезды

Fig. 6. Evolution of the Oort cloud after the collision: 1 – the initial distribution of objects; 2 – after 3.8×10^5 years, 3 – after 1.6×10^6 years after the moment of closest approach with the star. The arrow shows the trajectory of the star

Кроме гиперболических орбит, в результате столкновения облака Оорта с массивной звездой образуются также и орбиты с малым эксцентриситетом. Были проанализированы параметры орбит 408 объектов с эксцентриситетом $e < 0,5$, среди которых объект с наименьшим эксцентриситетом орбиты $e = 0,0074$ имеет большую полуось $a = 25\,660$ а. е. (Табл. 1).

Таблица 1
Table 1

Параметры орбит с малым эксцентриситетом
The parameters of the orbits with small eccentricity

Статистические оценки	Параметры орбит				
	Эксцентриситет e	Большая полуось a , а. е.	Расстояние в перигелии q , а. е.	Расстояние в афелии a_f , а. е.	Период T , тыс. лет
Максимум	0,4990	92 539	55 636	137 390	28 151
Минимум	0,0074	4 636	2 538	6 573	316
Среднее	0,3369	29 953	20 064	39 842	5 671
Медиана	0,3589	26 592	17 964	34 581	4 336

Отметим, что медиана распределения орбит объектов по большой полуоси, равная 26 592 а. е., мало отличается от таковой (29 070 а. е. после столкновения со звездой) для всех объектов облака Оорта в нашей модели. Имеет место слабая отрицательная корреляция между e и a орбит этих объектов. Оценка коэффициента корреляции: $-0,11$, т.е. орбиты с большей полуосью a имеют в среднем меньший эксцентриситет.

Эффектом уменьшения эксцентриситета орбит в результате столкновения со звездой можно объяснить и снижение численности объектов с малым перигелийным расстоянием q . Если до столкновения в модельном образце насчитывалось 789 объектов, у которых перигелий находился в околопланетной области ($q < 35$ а. е.), то после



столкновения их число снизилось до 283. Данные об элементах орбит этих объектов содержит табл. 2.

Таблица 2
Table 2

Параметры орбит с $q < 35$ а. е.
The parameters of orbits with $q < 35$ AU

Статистические оценки	Параметры орбит					
	до столкновения			после столкновения		
	e	$1/a, (\text{а. е.})^{-1}$	$q, \text{а. е.}$	e	$1/a, (\text{а. е.})^{-1}$	$q, \text{а. е.}$
Максимум	1,0081	0,205 122	34,90	1,0142	0,205 803	34,47
Минимум	0,7918	-0,001 984	0,007	0,7816	-0,002 720	0,008
Среднее	0,9933	0,000 977	14,21	0,9837	0,002 174	15,76
Медиана	0,9983	0,000 115	12,99	0,9913	0,000 466	15,72

Мы видим, что медиана их распределения по обратной большой полуоси $1/a$ значительно больше после столкновения, чем до него. Вероятно, это вызвано тем, что перигелийные расстояния q большей части из 789 объектов после столкновения со звездой существенно возросли, и они по этой причине не попали в интервал $q < 35$. Данный вывод согласуется с утверждением о том, что прохождения звезд вблизи облака Оорта приводят к увеличению перигелийных расстояний [Morbidelli, 2004].

Заключение

Таким образом, столкновение Солнечной системы с достаточной массивной звездой, влечет потерю значительной части его объектов по причине их перехода на гиперболические орбиты. В данном численном эксперименте доля таких объектов составила 33 %. Очевидно, что на раннем этапе существования Солнечной системы облако Оорта было намного более массивным, особенно, если Солнечная система возникла в составе рассеянного звездного скопления. В этом случае процесс диссипации облака из-за звездных сближений происходит более интенсивно. Действительно, эффект воздействия столкновений сильно зависит от скорости звезд и их плотности распределения в пространстве. В настоящее время средняя скорость Солнца относительно ближайших звезд равна 19,7 км/с [Аллен, 1977]. Однако в звездных скоплениях она значительно ниже. Так, например, оценка дисперсии скоростей звезд для скопления Плеяды составляет $(0,41 \pm 0,30)$ км/с [Данилов, 2015, с. 452]. Малая скорость звезд и более высокая звездная плотность в скоплении значительно усиливают эффекты воздействия близко проходящих звезд на облако Оорта.

Сближения звезд с Солнечной системой увеличивают дисперсию эксцентриситетов орбит. Как следствие, кроме гиперболических орбит, порождаются орбиты с малым эксцентриситетом ($e < 0,5$). Однако медиана распределения таких орбит по большой полуоси a всего лишь на ~9 % меньше медианы распределения всех объектов облака. Поэтому облако Оорта может содержать множество объектов, скрытых от наблюдений. Так, например, наблюдение кометы Галлея в афелии (35 а. е.) сейчас уже доступно с помощью крупнейших телескопов [Hainaut, 2004]. Однако на расстоянии в 30 000 а. е. от Солнца даже Юпитер виден был бы как объект 36-звездной величины, что за пределом возможностей современной наблюдательной техники.

Воздействие гравитационного поля близко проходящей звезды влечёт за собой нарушение однородности ориентации орбит и радиальной симметрии пространственного распределения объектов. После столкновения со звездой перигелии орбит концентрируются к точке максимального сближения. Поэтому, вследствие

неоднократности явления сближения Солнечной системы с достаточно массивными звездами, возможно существование многочисленных радиантов долгопериодических комет, которые в настоящий момент ещё не определены из-за сравнительного малого количества комет, открытых до настоящего времени.

Список литературы References

1. Аллен К.У. 1977. Астрофизические величины. Пер. с англ. М.: Мир, 279. (Allen C.W. 1973, 1976. *Astrophysical quantities*. Third edition. The Athlone Press University of London, 310.)
Allen K.U. 1977. *Astrofizicheskie velichiny* [Astrophysical quantities]. Per. s angl. M.: Mir, 279. (Allen C.W. 1973, 1976. *Astrophysical quantities*. Third edition. The Athlone Press University of London, 310.)
2. Бирюков Е.Е. 2007. Захват комет из облака Оорта на орбиты галлеевского типа и орбиты семейства Юпитера. *Астрономический вестник*, т. 41, № 3: 232–240.
Biryukov E.E. 2007. *Zahvat komet iz oblaka Oorta na orbity galleevskogo tipa i orbity semejstva YUпитера* [Capturing comets from the Oort cloud into galley-type and Jupiter-family orbits]. *Astronomicheskij vestnik*, t. 41, № 3: 232–240. (in Russian)
3. Бобылев В.В., Байкова А.Т. 2017. Поиск звезд, тесно сближающихся с Солнечной системой, по данным каталогов Gaia DR1 и RAVE5. *Письма в астрономический журнал*, т. 43, № 8: 616–623.
Bobylev V.V., Bajkova A.T. 2017. *Poisk zvezd, tesno sblizhayushchihsya s Solnechnoj sistemoj, po dannym katalogov Gaia DR1 i RAVE5* [Search for stars that are close to the Solar system, according to the catalogues Gaia DR1 and RAVE5]. *Pis'ma v astronomicheskij zhurnal*, t. 43, № 8: 616–623. (in Russian)
4. Данилов В.М., Локтин А.В. 2015. Оценки приливных радиусов трех рассеянных звездных скоплений. *Астрофизический бюллетень*, т. 70, № 4: 439–455.
Danilov V.M., Loktin A.V. 2015. *Ocenki prilivnyh radiusov trekh rasseyannyh zvezdnyh skoplenij* [Estimates of tidal radii of three scattered star clusters]. *Astrofizicheskij byulleten'*, t. 70, № 4: 439–455. (in Russian)
5. Заболоцкий А.М. 2017. Вероятность сближения звезд с Солнечной системой. *Материалы Международной научно-практической конференции "Актуальные проблемы развития науки и современного образования"*. Белгород: 41–43.
Zabolockij A.M. 2017. *Veroyatnost' sblizheniya zvezd s Solnechnoj sistemoj* [The probability of stars approaching the Solar system]. *Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Aktual'nye problemy razvitiya nauki i sovremennogo obrazovaniya"*. Belgorod: 41–43. (in Russian)
6. Заболоцкий А.М. 2018. Программа для ЭВМ "Gravitational Systems". Официальный бюллетень федеральной службы по интеллектуальной собственности (Роспатент) "Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем". №10. № регистрации: 2018662252.
Zabolockij A.M. 2018. *Programma dlya EHVM "Gravitational Systems"* [Computer program "Gravitational Systems"]. *Oficial'nyj byulleten' federal'noj sluzhby po intellektual'noj sobstvennosti (Rospatent) "Programmy dlya EHVM. Bazy dannyh. Topologii integral'nyh mikroskhem"*. №10. № registracii: 2018662252. (in Russian)
7. Задача Кеплера. Столкновения. Регуляризация. [Электронный ресурс] : [сб. работ]. 2006. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 452. URL: <http://www.iprbookshop.ru/16517.html>.
Zadacha Keplera. Stolknoveniya. Regularizaciya [Kepler problem. Clashes. Regularization]. [EHlektronnyj resurs] : [sb. rabot]. 2006. M.-Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij. 452. URL: <http://www.iprbookshop.ru/16517.html>. (in Russian)
8. Ильина В.А., Силаев П.К. 2004. Численные методы для физиков-теоретиков. II. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 118.
Il'ina V.A., Silaev P.K. 2004. *CHislennye metody dlya fizikov-teoretikov* [Numerical methods for theoretical physicists]. II. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij. 118. (in Russian)



9. Хайрер Э. и др. 1990. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. М.: Мир. 512. (Hairer E. et al. 1987. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Berlin, Springer-Verlag. 480.)

Hajrer E.H. i dr. 1990. Reshenie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Nezhestkie zadachi [Solving ordinary differential equations. Nonstiff Problems]. Per. s angl. M.: Mir. 512. (Hairer E. et al. 1987. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Berlin, Springer-Verlag. 480.)

10. ARI Data Base for Nearby Stars. Astronomisches Rechen-Institut, Heidelberg. Available at: <http://wwwadd.zah.uni-heidelberg.de/datenbanken/aricns/gliese.htm>.

11. Bobylev V.V. 2010. Searching for Stars Closely Encountering with the Solar System. *Astronomy Letters*, Vol. 36, No. 3: 220–226.

12. Docobo J.A., Ling J.F. 2007. Orbits and system masses of 14 visual double Stars with early-type components. *The Astronomical Journal*, Vol. 133, No 4: 1209–1216.

13. Dones L. et al. 2004. Oort Cloud Formation and Dynamics. *Comets II*. University of Arizona Press: 153–173.

14. Hainaut O.R. et al. 2004. Post-perihelion observations of comet 1P/Halley. *Astronomy & Astrophysics*, 417: 1159–1164.

15. Garsia-Sanchez J. et al. 1999. Stellar Encounters with the Oort Cloud based on Hipparcos Data. *The Astronomical Journal*, Vol. 117, No 2: 1042–1055.

16. Hummel C.A. et al. 1994. Very High Precession Orbit of Capella by Long Baseline Interferometry. *The Astronomical Journal*, Vol. 107, No 5: 1859–1867.

17. Kervella P. et al. 2009. The nearby eclipsing stellar system δ Velorum I. Origin of the infrared excess from VISIR and NACO imaging. *Astronomy & Astrophysics*, 493: 107–114.

18. Mamajek E.E. et al. 2015. The Closest known flyby of a Star to the Solar System. *Astrophysical Journal Letters*, 800, L17, arXiv:1502.04655. DOI:10.1088/2041-8205/800/1/L17.

19. Marcos C.F. et al. 2018. Where the Solar system meets the solar neighbourhood: patterns in the distribution of radiant of observed hyperbolic minor bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Volume 476, Issue 1: 1–5.

20. Matthews R.A.J. 1994. The Close Approach of Stars in the Solar Neighbourhood. *Q. J. R. astr. Soc.*, 35: 1–9.

21. Morbidelli A., Levison H.F. 2004. Scenarios for the origin of the orbit of the trans-neptunian objects 2000 CR₁₀₅ and 2003 VB₁₂ (Sedna). *The Astronomical Journal*, 128: 2564–2576.

22. Mullari A.A., Orlov V.V. 1996. Encounters of the Sun with nearby stars in the past and future. *Earth, Moon, and Planets*, No 72: 19–23.

23. Otero S.A. et al. 2000. Delta Velorum is an Eclipsing Binary. *Information Bulletin on Variable Stars*, No 4999.

24. Rickman H. et al. 2008. Injection of Oort Cloud comets: the fundamental role of stellar perturbations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 102: 111–132.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT AUTHORS

- Алиев С.А.* – старший преподаватель, кафедры высшей математики и информатики Нахичеванского института учителей. Респ. Азербайджан, г. Нахичевань
- Балкизов Ж.А.* – кандидат физико-математических наук, заведующий отделом уравнений смешанного типа института прикладной математики и автоматизации Кабардино-балкарского научного центра РАН. г. Нальчик
- Букушева А.В.* – кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. г. Саратов
- Голочалова А.В.* – магистрант кафедры общей и прикладной физики Белгородского государственного национального исследовательского университета. г. Белгород
- Заболоцкий А.М.* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и химии Белгородского государственного аграрного университета им. В.Я. Горина. п. Майский
- Зинькова И.М.* – магистрант кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета. г. Белгород
- Кадырова К.Р.* – магистрант Уфимского государственного авиационного технического университета. г. Уфа
- Куликов А.Н.* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова. г. Ярославль
- Куликов Д.А.* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова. г. Ярославль
- Кулумбаев Э.Б.* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и прикладной физики Белгородского государственного национального исследовательского университета. г. Белгород
- Ларин А.А.* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина». г. Воронеж
- Лукащук В.О.* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем Уфимского государственного авиационного технического университета. г. Уфа



- Малай Н.В.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики Белгородского государственного национального исследовательского университета. г. Белгород
- Mohebbifar M.R.** – Department of Physics, Faculty of Science, Malayer University. Malayer, Iran
- Оруджев Э.Г.** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Математическая экономика» Бакинского государственного университета. г. Баку
- Попов И.П.** – старший преподаватель кафедры общей физики Курганского государственного университета. г. Курган
- Рубашкина Т.И.** – кандидат технических наук, доцент кафедры общей химии Белгородского государственного национального исследовательского университета. г. Белгород
- Савотченко С.Е.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Белгородского государственного технологического университета имени В.Г. Шухова. г. Белгород
- Сафонов В.Г.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета. Республика Беларусь, г. Минск
- Тюпин В.Н.** – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной геологии и горного дела Белгородского государственного национального исследовательского университета. г. Белгород
- Щербина В.В.** – ст.н.с., кафедра высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета. Республика Беларусь, г. Минск
- Щукин Е.Р.** – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Объединенного института высоких температур РАН. г. Москва
- Шулиманова З.Л.** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшей математики и естественных наук» Российского университета транспорта (МИИТ). Г. Москва

Подписной купон

Прошу оформить подписку на журнал «Научные ведомости Белгородского государственного университета» Серия _____ на следующие номера за 201_ год

1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал

(Отметьте, пожалуйста, требуемые номера в таблице)

комплект(ов)

Стоимость редакционной подписки в 2017 г.

(включает стоимость почтовой доставки заказной бандеролью по России):
на 1 месяц (1 номер) – 1100 руб.; на 12 месяцев (4 номера) – 3800 руб.;

ФИО _____
 Индекс _____
 Республика/Край/Область _____
 Город/Село _____
 Улица _____ дом _____ кв. _____
 Телефон _____ E-mail _____
 Дата _____

Квитанция

ИЗВЕЩЕНИЕ	Форма № ПД-4			
	НИУ «БелГУ»			
	Наименование получателя платежа ИНН 3123035312; КПП 312301001; ОКАТО 14401365000; Р/с 40503810207004000002 в Белгородском отделении № 8592 ПАО Сбербанк БИК 041403633 К/счет 30101810100000000633 Вид платежа КОД 07430201010010000130 за что Подписку на журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия « _____ » (наименование банка, другие банковские реквизиты)			
	(Фамилия, И., О., адрес плательщика)			
		Вид платежа	Дата	Сумма
	Кассир	Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года		
Плательщик				
КВИТАНЦИЯ Кассир	Форма № ПД-4			
	НИУ «БелГУ»			
	Наименование получателя платежа ИНН 3123035312; КПП 312301001; ОКАТО 14401365000; Р/с 40503810207004000002 в Белгородском отделении № 8592 ПАО Сбербанк БИК 041403633 К/счет 30101810100000000633 Вид платежа КОД 07430201010010000130 за что Подписку на журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия « _____ » (наименование банка, другие банковские реквизиты)			
	(Фамилия, И., О., адрес плательщика)			
		Вид платежа	Дата	Сумма
		Подписка на журнал «Научные ведомости БелГУ» Серия _____ на _____ 20__ года		
Плательщик				