УДК 512.542
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕТКИ ЧАСТИЧНО ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

ON SOME PROPERTIES OF THE LATTICE OF PARTIALLY TOTALLY SATURATED FORMATIONS OF FINITE GROUPS

В.В. Щербина, В.Г. Сафонов
V.V. Shcherbina, V.G. Safonov

Белорусский государственный университет,
Республика Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4

Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Avenue, Minsk, 220030, Republic of Belarus

E-mail: shcherbinavv@tut.by

Аннотация

Изучаются свойства решетки всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп. Установлено, что для любого подгруппового функтора τ решетка всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является модулярной и алгебраической. Доказана $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех тотально ω-насыщенных формаций. Исходя из вложимости решетки всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций в решетку всех тотально ω-насыщенных формаций показано, что решетка всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой. В качестве следствия полученных результатов установлены модулярность, алгебраичность и $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций, а также решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций.

Abstract

All groups under consideration are finite. The paper studies some properties of the lattice of all τ-closed totally ω-saturated formations. We show that for any subgroup functor τ, the lattice of all τ-closed totally ω-saturated formations is modular and algebraic. We also prove that the lattice of all totally ω-saturated formations is $\mathfrak{G}$-separable. This strengthens a theorem of V.G. Safonov. Using embeddability the lattice of all τ-closed totally ω-saturated formations in the lattice of all totally ω-saturated formation, we establish that the lattice of all τ-closed totally ω-saturated formations is $\mathfrak{G}$-separable. In particular, we show that the lattice of all τ-closed totally p-saturated formations is modular, algebraic, and $\mathfrak{G}$-separable as well as the lattice of all τ-closed totally saturated formations.

Ключевые слова: формация конечных групп, тотально ω-насыщенная формация, решетка формаций, τ-замкнутая формация, модулярная решетка, алгебраическая решетка, отделимая решетка формаций.
Keywords: formation of finite groups, totally ω-saturated formation, lattice of formations, τ-closed formation, modular lattice, algebraic lattice, separable lattice of formations.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в работах Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и других авторов [Шеметков, 1978; Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Skiba, Shemetkov, 2000; Воробьев, 2012].

Одним из интенсивно развивающихся направлений теории классов конечных групп является направление, связанное с исследованием алгебры классов конечных групп и нахождением ее приложений для решения различных задач теории групп. Существенная часть таких исследований состоит в алгебраизации системы исследуемых классов конечных групп, что позволяет использовать методы общей алгебры, в частности, теоремы о решетках и полугруппах [Шеметков, Скиба, 1989; Скиба, 1997].

Модулярность решетки всех формаций, а также решетки всех насыщенных формаций, установленная А.Н. Скибой [1986], стала основой для разработки решеточных методов в теории формаций конечных групп. Конструкции и результаты общей теории решеток позволяют использовать свойства естественно возникающих решеток формаций, находить более компактные схемы доказательств как уже известных фактов, так и новых результатов [Шеметков, Скиба, 1989; Doerk, Hawkes, 1992; Скиба, 1997; Guo, 2000; Ballester-Bolinches, Ezquerro, 2006; Воробьев, 2012; Guo, 2015].

Изучению ряда свойств решетки всех тотально насыщенных формаций, а также структурного строения тотально насыщенных формаций с заданными ограничениями на решетку их тотально насыщенных подформаций посвящены работы Н.Н. Воробьева, В.Г. Сафонова и других авторов [Воробьев, 2000; Safonov, 2006a, b; Safonov, 2007; Сафонов, 2008; Сафонов, Шеметков, 2008; Safonov, 2010].

А.Н. Скибой [1997] доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является модулярной и алгебраической, а также установлена $\mathfrak{G}$-отделимость этой решетки. Модулярность, алгебраичность и $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций доказана В.Г. Сафоновым [Safonov, 2006a, b; Safonov, 2010].

В теории частично насыщенных формаций А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков [2000] доказали модулярность решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций при любом натуральном n. В последующем И.П. Шабалина [2002, 2003] доказала алгебраичность и модулярность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций установлена Н.Н. Воробьевым, А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [2009] (см. также [Shemetkov et al., 2009]).

В.Г. Сафоновым [2004] доказана модулярность решетки всех тотально ω-насыщенных формаций, а также установлена алгебраичность этой решетки. Исследование различных свойств решетки частично тотально насыщенных формаций проведено в работах В.Г. Сафонова и других авторов [Сафонов, 2004; Сафонов, Сафонова, 2014; Сафонов, Сафонова, 2017; Щербина, Сафонов, 2019].

В настоящей работе мы покажем, что решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является модулярной и алгебраической, а также установим $\mathfrak{G}$-отделимость решетки l^{ω}_{∞} всех тотально ω-насыщенных формаций. В качестве следствия последнего результата покажем, что решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.

1. Определения и обозначения

В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, p – простое число, $[K]A$ – полупрямое произведение группы K с некоторой группой операторов A этой группы, $A \wr B$ – стандартное сплетение группы A с группой B. Для каждого множества простых чисел π через π' обозначается дополнение к π во множестве всех простых чисел. Символами $F_p(G)$ и $O_\pi(G)$ обозначают соответственно наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G и наибольшую нормальную π-подгруппу группы G, а символом $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Символы $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\pi$ обозначают класс всех p-групп, нильпотентных π-групп и разрешимых π-групп соответственно.

Символом $G_{\omega d}$ обозначают наибольшую нормальную в G подгруппу K со свойством $\omega \cap \pi(H/N) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/N из K ($G_{\omega d}=1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing$) [Skiba, Shemetkov, 2000].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$ называют *ω-локальным спутником*. Следуя [Skiba, Shemetkov, 2000], сопоставим произвольному ω-локальному спутнику f класс групп

$$\mathrm{LF}_\omega(f) = \{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех простых } p \in \omega \cap \pi(G)\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальной*, а f – *ω-локальным спутником* этой формации [Skiba, Shemetkov, 2000]. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называется *внутренним* (или *приведенным*) спутником.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют *ω-насыщенной*, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.

Пусть A, B – группы, $\varphi : A \to B$ – эпиморфизм, Ω и Σ – некоторые системы подгрупп в A и B соответственно. Тогда через Ω^φ обозначается множество $\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ – множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех групп из Σ.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс групп и всякой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Следуя А.Н. Скибе [1997], будем говорить, что *τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор* (или, иначе, *τ – подгрупповой функтор на* $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^\varphi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то символ $\mathfrak{X}$ опускают и говорят просто о подгрупповом функторе.

Через $S\{G\}$ обозначают совокупность всех подгрупп группы G, через $S_n\{G\}$ – совокупность всех нормальных подгрупп группы G. Подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$, *единичным*, если $\tau(G) = S\{G\}$ для любой группы G. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутым*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что *решеткой* называется частично упорядоченное множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, обозначаемую $x \wedge y$, и точную верхнюю грань, обозначаемую $x \vee y$ [Биркгоф, 1984]. Решетка L называется *полной*, если любое ее подмножество X имеет в L точные верхнюю и нижнюю грани. *Подрешеткой* решетки L называется подмножество $Y \subset L$, такое, что если $a \in Y$, $b \in Y$, то $a \wedge b \in Y$ и $a \vee b \in Y$. Подрешетка решетки сама является решеткой с теми же операциями объединения и пересечения. Решетка называется *модулярной*, если из условия $x \le z$ следует равенство $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ для любого y [Биркгоф, 1984]. Элемент a решетки L называется *компактным*, если из $a \le \vee(x_j \mid j \in J)$ следует $a \le \vee(x_j \mid j \in F)$

для некоторого конечного подмножества $F \subset J$. Решетка L называется *алгебраической*, если каждый элемент $a \in L$ является объединением компактных элементов решетки L [Биркгоф, 1984].

Непустую систему формаций θ называют *полной решеткой формаций*, если пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ и во множестве θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \theta$. Всякая полная решетка формаций является полной решеткой в обычном смысле. Формации из θ называют *θ-формациями*. Спутник f называется *θ-значным*, если все его значения принадлежат θ. Символом θ^{ω} обозначается совокупность всех формаций, которые обладают ω-локальным θ-значным спутником.

Всякую формацию считают 0-*кратно ω-локальной*. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно ω-локальной*, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными формациями. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *тотально ω-локальной*, если она n-кратно ω-локальна для всех n [Скиба, 1987]. Если при этом формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой, то $\mathfrak{F}$ называют *τ-замкнутой n-кратно ω-локальной* и соответственно *τ-замкнутой тотально ω-локальной.*

Ввиду теоремы 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной тогда и только тогда, когда она ω-насыщена. Поэтому n-кратно ω-локальные и тотально ω-локальные формации называют также *n-кратно ω-насыщенными* и, соответственно, *тотально ω-насыщенными формациями*.

Символом $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ обозначают совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций. Наряду с символом l_{ω_∞} для обозначения совокупности всех тотально ω-насыщенных формаций также используют символ l^{ω}_{∞}.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Формацию $l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}\mathfrak{X}$ называют *τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией, порожденной совокупностью групп* $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}\mathfrak{X} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}G$ называют *однопорожденной τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией*.

Для любых τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H} = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Вместе с символом $\vee_{\omega_\infty}$ для обозначения верхней грани в решетке $l_{\omega_\infty} = l^{\omega}_{\infty}$ также используют символ $\vee^{\omega}_{\infty}$. Относительно операций $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}$ и $\cap$ совокупность всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций $l^{\tau}_{\omega_\infty}$, частично упорядоченная по включению $\subseteq$, является полной решеткой формаций (см. теорема 1.5.4 [Воробьев, 2012, с. 54]). В этой решетке $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$ и $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ являются соответственно точной верхней и точной нижней гранями для подмножества $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из $l^{\tau}_{\omega_\infty}$.

ω-локальный спутник, все значения которого – $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации, называется *$l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значным спутником*.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая система $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значных спутников. Тогда через $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_i \mid i \in I)$ обозначается такой $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник f, что

$f(a) = l^{\tau}_{\omega_\infty}\, \mathrm{form}(\cup_{i\in I} f_i(a))$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(a) \neq \varnothing$. В противном случае полагают $f(a) = \varnothing$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают $\mathfrak{X}(F_p) = \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}(F_p) = \varnothing$, если $p \notin \pi(\mathfrak{X})$.

Для произвольной τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^{\tau}_{\omega_\infty}$ обозначают ее *минимальный ω-локальный $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник*, т. е. пересечение всех ω-локальных $l^{\tau}_{\omega_\infty}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Наряду с символом $\mathfrak{F}_{\omega_\infty}$ для обозначения минимального ω-локального l^{ω}_{∞}-значного спутника формации $\mathfrak{F}$ также используют символ $\mathfrak{F}^{\omega}_{\infty}$.

Для произвольной (тотально) ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через F обозначают ее *канонический (максимальный внутренний ω-локальный) спутник*. Согласно замечанию 1 [Skiba, Shemetkov, 2000] (см. также замечание 1.2.17 [Воробьев, 2012, с. 23]), если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$ и f – произвольный внутренний ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливо неравенство $f \leq F$.

Полная решетка формаций θ называется *частичной алгеброй формаций* [Скиба, 1997] (см. также [Воробьев, 2000; Воробьев, 2012]), если для любого простого числа p и для любой формации $\mathfrak{F} \in \theta$ имеет место $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} \in \theta$.

Ввиду леммы 11 [Щербина, Сафонов, 2019] (см. также лемма 3.4 [Сафонов, Сафонова, 2017]) решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является частичной алгеброй формаций.

Полная решетка формаций θ^{ω} называется *индуктивной* (см. [Скиба, 1997; Воробьев, 2012]), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^{\omega}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних θ-значных ω-локальных спутников f_i, где $\mathfrak{F}_i = LF_{\omega}(f_i)$, имеет место

$$\vee_{\theta^{\omega}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_{\omega}(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)).$$

Ввиду леммы 21 [Щербина, Сафонов, 2019] решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций индуктивна.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций θ называется $\mathfrak{X}$*-отделимой* [Скиба, 1997], если для любых терма $\upsilon(x_1,\ldots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\theta}\}$, формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$ из θ и группы $A \in \mathfrak{X} \cap \upsilon(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1,\ldots,A_n \in \mathfrak{F}_n$, что $A \in \upsilon(\theta\,\mathrm{form}A_1,\ldots,\theta\,\mathrm{form}A_n)$.

2. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций конечных групп, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 1 [Щербина, Сафонов, 2019]. Решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является полной подрешеткой решетки l^{ω}_{∞} всех тотально ω-насыщенных формаций.

Лемма 2 [Сафонов, 2004]. Решетка l^{ω}_{∞} является модулярной и алгебраической.

Лемма 3 [Skiba, Shemetkov, 2000]. Пусть $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f = \cap_{i\in I} f_i$.

Лемма 4 [Щербина, Сафонов, 2019]. Решетка $l_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций индуктивна.

Лемма 5 [Сафонов, 2004]. Пусть $\mathfrak{M}$ – радикальная формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторое множество формаций. Тогда $\bigcap_{i\in I}(\mathfrak{M}\mathfrak{F}_i) = \mathfrak{M}(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$.

Лемма 6 [Щербина, Сафонов, 2019]. Пусть $\mathfrak{M}_i$ – τ-замкнутая тотально ω-насыщенная формация, $i \in I$ и π – такое непустое множество простых чисел, что $\pi \subseteq \omega$. Тогда

$$\vee_{\omega_\infty}^\tau(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{M}_i \mid i \in I) = \mathfrak{N}_\pi(\vee_{\omega_\infty}^\tau(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)).$$

Лемма 7 [Сафонов, Сафонова, 2017; Щербина, Сафонов, 2019]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая τ-замкнутая формация, π – такое множество простых чисел, что $\pi(\mathfrak{F})\cap\omega \subseteq \pi$. Тогда произведение $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формацией.

Лемма 8 [Скиба, 1997, с. 159]. Решетка l_n^τ $\mathfrak{G}$-отделима, а решетка разрешимых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{S}$-отделима.

Лемма 9 [Щербина, Сафонов, 2019]. Пусть $\mathfrak{F} = l_{\omega_\infty}^\tau \operatorname{form}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда если f – минимальный ω-локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:

1) $f(\omega') = l_{\omega_\infty}^\tau \operatorname{form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l_{\omega_\infty}^\tau \operatorname{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ для всех $p \in \omega$;

3) если h – произвольный ω-локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$ и p – некоторое фиксированное число из ω, то $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$, где $f_1(a) = h(a)$ для всех $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$,

$$f_1(p) = l_{\omega_\infty}^\tau \operatorname{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1),$$

кроме того, $f_1(p) = f(p)$.

Лемма 10 [Щербина, Сафонов, 2019]. Пусть f_i – минимальный ω-локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$-значный спутник τ-замкнутой тотально ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}_i$, где $i \in I$. Тогда $\vee_{\omega_\infty}^\tau(f_i \mid i \in I)$ – минимальный ω-локальный $l_{\omega_\infty}^\tau$-значный спутник формации

$$\mathfrak{F} = \vee_{\omega_\infty}^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I).$$

Лемма 11 [Щербина, Сафонов, 2019]. Решетка $l_{\omega_\infty}^\tau$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является частичной алгеброй формаций.

Следующая лемма является частным случаем леммы 14 [Щербина, Сафонов, 2019].

Лемма 12 [Щербина, Сафонов, 2019]. Пусть P – неединичная p-группа для некоторого простого числа p, $W_1 = K\cdot B_1 \le W = P\,wr\,B = K\cdot B$, где $K = P^{(B)} = \{f \mid f : B \to P\}$ – база регулярного сплетения W, группа $B \ne 1$, B_1 – подгруппа группы B. Пусть также ν – такое непустое множество простых чисел, что $p \in \nu$.

Тогда

$$F_p(W_1) = F_\nu(W_1) = F(W_1) = O_p(W_1) = K \cdot O_p(B_1) = P^{(B)} \cdot O_p(B_1).$$

Лемма 13 [Skiba, Shemetkov, 2000]. Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 14 [Скиба, 1997, с. 152]. Пусть $N_1 \times \ldots \times N_k = \mathrm{Soc}(G)$, где $k > 1$ и G – группа с $O_p(G) = 1$. Пусть M_i – наибольшая нормальная в G группа, содержащая $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$, но не содержащая N_i. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ факторгруппа G/M_i монолитична и ее монолит $N_i M_i / M_i$ G-изоморфен N_i и $O_p(G/M_i) = 1$;

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$.

2. Модулярность и алгебраичность решетки τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций

Лемма 15. Пусть θ – полная решетка формаций, η – полная подрешетка решетки θ, $\upsilon_\eta(x_1, \ldots, x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_\eta\}$, $\upsilon_\theta(x_1, \ldots, x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$, получаемый из терма υ_η заменой каждого вхождения символа $\vee_\eta$ на символ $\vee_\theta$. Тогда для любых формаций $\mathfrak{F}_i \in \eta$, $i = 1, \ldots, n$ имеет место

$$\upsilon_\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) = \upsilon_\theta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) \in \eta.$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов из $\{\cap, \vee_\eta\}$ и $\{\cap, \vee_\theta\}$ соответственно в термы υ_η и υ_θ.

Если $t = 0$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть $t = 1$. Тогда либо $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \in \eta$, либо $\mathfrak{F}_1 \vee_\eta \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \vee_\theta \mathfrak{F}_2 \in \eta$, причем последнее соотношение следует из того, что η – полная подрешетка решетки θ и $\mathfrak{F}_i \in \eta$, $i = 1, 2$.

Предположим теперь, что термы υ_η и υ_θ имеют $t > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_\eta\}$ и $\{\cap, \vee_\theta\}$ соответственно и для термов с меньшим числом вхождений утверждение леммы верно. Пусть

$$\upsilon_\eta(x_1, \ldots, x_n) = \upsilon_{1\eta}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \Delta_\eta \upsilon_{2\eta}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$
$$\upsilon_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \upsilon_{1\theta}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \Delta_\theta \upsilon_{2\theta}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta_\theta = \cap$, если $\Delta_\eta = \cap$ и $\Delta_\theta = \vee_\theta$, если $\Delta_\eta = \vee_\eta$, причем $\upsilon_{k\theta}$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$, получаемый из терма $\upsilon_{k\eta}$ заменой каждого вхождения символа $\vee_\eta$ на символ $\vee_\theta$, $k = 1, 2$, $r, s \in \mathrm{N}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Согласно предположению индукции,

$$\upsilon_{1\eta}(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) = \upsilon_{1\theta}(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) \in \eta,$$
$$\upsilon_{2\eta}(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \upsilon_{2\theta}(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) \in \eta.$$

Следовательно,

$$\upsilon_{\eta}(\mathsf{F}_1,\ldots,\mathsf{F}_n)=\upsilon_{1\eta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})\Delta_{\eta}\upsilon_{2\eta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s})=$$
$$=\upsilon_{1\theta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})\Delta_{\eta}\upsilon_{2\theta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s})=$$
$$=\upsilon_{1\theta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})\Delta_{\theta}\upsilon_{2\theta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s})=\upsilon_{\theta}(\mathsf{F}_1,\ldots,\mathsf{F}_n)\in\eta.$$

Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть θ – полная решетка формаций, η – полная подрешетка решетки θ. Тогда любое тождество сигнатуры $\{\cap,\vee_{\theta}\}$ истинно в η.

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$\upsilon_{1\theta}(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})=\upsilon_{2\theta}(x_{j_1},\ldots,x_{j_s})$$

сигнатуры $\{\cap,\vee_{\theta}\}$, где $r, s\in\mathrm{N}$. Пусть

$$\upsilon_{1\eta}(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})=\upsilon_{2\eta}(x_{j_1},\ldots,x_{j_s})$$

– то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\cap,\vee_{\eta}\}$.

Пусть

$$\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r};\ \mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s}\in\eta\subseteq\theta.$$

По условию

$$\upsilon_{1\theta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})=\upsilon_{2\theta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s}).$$

Ввиду леммы 15 имеют место соотношения

$$\upsilon_{1\eta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})=\upsilon_{1\theta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r}),$$
$$\upsilon_{2\eta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s})=\upsilon_{2\theta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s}).$$

Следовательно,

$$\upsilon_{1\eta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})=\upsilon_{1\theta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})=\upsilon_{2\theta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s})=\upsilon_{2\eta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s}),$$

т. е.

$$\upsilon_{1\eta}(\mathsf{F}_{i_1},\ldots,\mathsf{F}_{i_r})=\upsilon_{2\eta}(\mathsf{F}_{j_1},\ldots,\mathsf{F}_{j_s}).$$

Лемма доказана.

Учитывая леммы 1 и 2, из леммы 16 получаем следующую теорему.

Теорема 1. Решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является модулярной.

Отметим некоторые следствия теоремы 1.

Если $\omega=\mathrm{P}$ – множество всех простых чисел, из теоремы 1 получаем

Следствие 1 [Safonov, 2006a]. Решетка l^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является модулярной.

В случае, когда $\omega=\{p\}$, из теоремы 1 имеем

Следствие 2. Решетка $l^{\tau}_{p_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций является модулярной.

Следствие 3. Для любых двух τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций M и H имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathsf{M}\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathsf{F}\Big/^{\tau}_{\omega_\infty}\mathsf{M}\cong\mathsf{F}\Big/^{\tau}_{\omega_\infty}\mathsf{M}\cap\mathsf{F}.$$

Если $\omega=\{p\}$, из следствия 3 вытекает

Следствие 4. Для любых двух τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций M и H имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathsf{M}\vee^{\tau}_{p_\infty}\mathsf{F}\Big/^{\tau}_{p_\infty}\mathsf{M}\cong\mathsf{F}\Big/^{\tau}_{p_\infty}\mathsf{M}\cap\mathsf{F}.$$

В случае, когда $\omega = \mathrm{P}$ – множество всех простых чисел, из следствия 3 получаем

Следствие 5 [Safonov, 2006a]. Для любых двух τ-замкнутых тотально насыщенных формаций M и H имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathsf{M} \vee_{\infty}^{\tau} \mathsf{F} \big/ {}_{\infty}^{\tau} \mathsf{M} \cong \mathsf{F} \big/ {}_{\infty}^{\tau} \mathsf{M} \cap \mathsf{F}.$$

Лемма 17. Пусть θ – алгебраическая решетка формаций, η – полная подрешетка решетки θ. Тогда η – алгебраическая решетка формаций.

Доказательство. Заметим, что ввиду полноты решетки η любая η-формация является решеточным объединением своих однопорожденных η-подформаций в решетке η. Следовательно, достаточно доказать, что для любой группы G однопорожденная η-формация $\mathsf{F} = \eta\,\mathrm{form}G$ является компактным элементом решетки η.

Пусть

$$\mathsf{F} = \eta\,\mathrm{form}G \subseteq \vee_{\eta}(\mathsf{F}_i \mid i \in I),$$

где $\mathsf{F}_i \in \eta$ для любого $i \in I$. Поскольку η – полная подрешетка решетки θ, то $\vee_{\theta}(\mathsf{F}_i \mid i \in I) \in \eta$ и, кроме того,

$$\vee_{\eta}(\mathsf{F}_i \mid i \in I) = \vee_{\theta}(\mathsf{F}_i \mid i \in I).$$

Значит,

$$\mathsf{F} \subseteq \vee_{\theta}(\mathsf{F}_i \mid i \in I).$$

Поскольку θ – алгебраическая решетка и формация $\mathsf{F}_i \in \eta \subseteq \theta$, $i \in I$, то существует такой конечный набор индексов $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ ($k \in \mathrm{N}$), что

$$\mathsf{F} \subseteq \vee_{\theta}(\mathsf{F}_j \mid j \in J).$$

Снова учитывая, что η – полная подрешетка решетки θ и $\mathsf{F}_j \in \eta$ для любого $j \in J$, имеем

$$\vee_{\eta}(\mathsf{F}_j \mid j \in J) = \vee_{\theta}(\mathsf{F}_j \mid j \in J).$$

Следовательно,

$$\mathsf{F} \subseteq \vee_{\theta}(\mathsf{F}_j \mid j \in J) = \vee_{\eta}(\mathsf{F}_j \mid j \in J).$$

Таким образом, решетка η алгебраична. Заметим, что ввиду леммы 4.8.1 [Воробьев, 2012, с. 247] компактными элементами алгебраической решетки η являются в точности однопорожденные формации из η. Лемма доказана.

Ввиду лемм 1 и 2 из леммы 17 вытекает следующий результат.

Теорема 2. Решетка $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является алгебраической.

Отметим основные следствия теоремы 2.

Применяя теорему 2 к случаю, когда $\omega = \{p\}$, получаем

Следствие 6. Решетка $l_{p_{\infty}}^{\tau}$ всех τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций является алгебраической.

Если $\omega = \mathrm{P}$ – множество всех простых чисел, из теоремы 2 вытекает

Следствие 7 [Safonov, 2006b]. Решетка l_{∞}^{τ} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является алгебраической.

2. G-отделимость решетки тотально ω-насыщенных формаций

Доказательство основной теоремы предварим несколькими леммами, первые две из которых являются простыми следствиями уже доказанных утверждений.

Лемма 18. Пусть $\upsilon(x_1,\ldots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$, f_i – внутренний ω-локальный l_∞^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1,\ldots,n$. Тогда

$$\upsilon(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n) = LF_\omega(\upsilon(f_1,\ldots,f_n)).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов из $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$ в терм υ.

При $t=0$ утверждение леммы очевидно.

Утверждение леммы для случая $t=1$ следует из леммы 3 и леммы 4 для тривиального подгруппового функтора τ.

Предположим теперь, что терм υ имеет $t>1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$. Пусть терм υ имеет вид

$$\upsilon(x_1,\ldots,x_n) = \upsilon_1(x_1,\ldots,x_{i_r})\Delta\upsilon_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}),$$

где $\Delta\in\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$, $r,s\in\mathrm{N}$,

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\}\cup\{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\} = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

и лемма для термов υ_1 и υ_2 выполняется. Тогда

$$\upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\ldots,\mathfrak{F}_{i_r}) = LF_\omega(\upsilon_1(f_{i_1},\ldots,f_{i_r})),$$

$$\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,\mathfrak{F}_{j_s}) = LF_\omega(\upsilon_2(f_{j_1},\ldots,f_{j_s})).$$

Понятно, что ω-локальные l_∞^ω-значные спутники $\upsilon_1(f_{i_1},\ldots,f_{i_r})$ и $\upsilon_2(f_{j_1},\ldots,f_{j_s})$ являются внутренними. Следовательно, по индукции,

$$\upsilon(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n) = \upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1},\ldots,\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,\mathfrak{F}_{j_s}) =$$

$$= LF_\omega(\upsilon_1(f_{i_1},\ldots,f_{i_r})\Delta\upsilon_2(f_{j_1},\ldots,f_{j_s})) = LF_\omega(\upsilon(f_1,\ldots,f_n)).$$

Лемма доказана.

Лемма 19. Пусть $\upsilon(x_1,\ldots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$. Тогда для любых тотально ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$ и всякого непустого множества простых чисел $\pi\subseteq\omega$ имеет место равенство

$$\upsilon(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}_\pi\upsilon(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов из $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$ в терм υ.

При $t=0$ утверждение леммы очевидно.

Пусть $t=1$. Поскольку $\mathfrak{N}_\pi$ – радикальная формация, то ввиду леммы 5 имеем

$$\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2).$$

Из леммы 6 для тривиального подгруппового функтора τ следует, что

$$\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1\vee_\infty^\omega\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{F}_1\vee_\infty^\omega\mathfrak{F}_2).$$

Предположим теперь, что терм υ имеет $t>1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$. Пусть терм υ имеет вид

$$\upsilon(x_1,\ldots,x_n) = \upsilon_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})\Delta\upsilon_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}),$$

где $\Delta\in\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$, $r,s\in\mathrm{N}$,

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\}\cup\{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\} = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

и лемма для термов υ_1 и υ_2 выполняется. Тогда

$$\upsilon_1(\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{i_1},\ldots,\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{i_r}) = \mathrm{N}_\pi \upsilon_1(\mathrm{F}_{i_1},\ldots,\mathrm{F}_{i_r}),$$

$$\upsilon_2(\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{j_1},\ldots,\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{j_s}) = \mathrm{N}_\pi \upsilon_2(\mathrm{F}_{j_1},\ldots,\mathrm{F}_{j_s}).$$

Следовательно, ввиду предположения индукции

$$\upsilon(\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_1,\ldots,\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_n) = \upsilon_1(\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{i_1},\ldots,\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{j_1},\ldots,\mathrm{N}_\pi \mathrm{F}_{j_s}) =$$
$$= \mathrm{N}_\pi \upsilon_1(\mathrm{F}_{i_1},\ldots,\mathrm{F}_{i_r})\Delta \mathrm{N}_\pi \upsilon_2(\mathrm{F}_{j_1},\ldots,\mathrm{F}_{j_s}) =$$
$$= \mathrm{N}_\pi(\upsilon_1(\mathrm{F}_{i_1},\ldots,\mathrm{F}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathrm{F}_{j_1},\ldots,\mathrm{F}_{j_s})) = \mathrm{N}_\pi \upsilon(\mathrm{F}_1,\ldots,\mathrm{F}_n).$$

Лемма доказана.

Лемма 20. Пусть θ – полная решетка формаций, $\upsilon(x_1,\ldots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap,\vee_\theta\}$, X_i и F_i – такие θ-формации, что $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{F}_i$, $i=1,\ldots,n$. Тогда

$$\upsilon(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) \subseteq \upsilon(\mathrm{F}_1,\ldots,\mathrm{F}_n).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов из $\{\cap,\vee_\theta\}$ в терм υ.

Если $t=0$, то утверждение леммы очевидно.

Пусть $t=1$. Тогда из условий $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{F}_i$, $i=1,2$ имеем

$$\mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2 \subseteq \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2,\ \mathrm{X}_1 \vee_\theta \mathrm{X}_2 \subseteq \mathrm{F}_1 \vee_\theta \mathrm{F}_2.$$

Предположим теперь, что терм υ имеет $t>1$ вхождений символов из $\{\cap,\vee_\theta\}$. Пусть терм υ имеет вид

$$\upsilon(x_1,\ldots,x_n) = \upsilon_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})\Delta\upsilon_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\cap,\vee_\theta\}$,

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\} = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

и лемма для термов υ_1 и υ_2 выполняется.

Тогда

$$\upsilon_1(\mathrm{X}_{i_1},\ldots,\mathrm{X}_{i_r}) \subseteq \upsilon_1(\mathrm{F}_{i_1},\ldots,\mathrm{F}_{i_r}),$$

$$\upsilon_2(\mathrm{X}_{j_1},\ldots,\mathrm{X}_{j_s}) \subseteq \upsilon_2(\mathrm{F}_{j_1},\ldots,\mathrm{F}_{j_s}).$$

Следовательно, по индукции,

$$\upsilon_1(\mathrm{X}_{i_1},\ldots,\mathrm{X}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathrm{X}_{j_1},\ldots,\mathrm{X}_{j_s}) \subseteq \upsilon_1(\mathrm{F}_{i_1},\ldots,\mathrm{F}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathrm{F}_{j_1},\ldots,\mathrm{F}_{j_s}),$$
$$\upsilon(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) \subseteq \upsilon(\mathrm{F}_1,\ldots,\mathrm{F}_n).$$

Лемма доказана.

Полагая в лемме 20 $\theta = l_\infty^\omega$ и учитывая, что l_∞^ω – полная решетка формаций (см. теорема 1.5.4 [Воробьев, 2012, с. 54] для тривиального подгруппового функтора τ), получаем следующую лемму.

Лемма 21. Пусть $\upsilon(x_1,\ldots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap,\vee_\infty^\omega\}$, X_i и F_i – такие l_∞^ω-формации, что $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{F}_i$, $i=1,\ldots,n$. Тогда

$$\upsilon(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n) \subseteq \upsilon(\mathrm{F}_1,\ldots,\mathrm{F}_n).$$

Теорема 3. *Решетка l_∞^ω всех тотально ω-насыщенных формаций является* G*-отделимой.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна, и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда найдутся терм $\upsilon(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap,\vee_\infty^\omega\}$ и l_∞^ω-формации $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n$, такие, что $G\in\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$, но не существует групп $A_1,\dots,A_n$, таких, что $A_1\in\mathfrak{F}_1,\dots,A_n\in\mathfrak{F}_n$ и $G\in\upsilon(l_\infty^\omega\,\mathrm{form}A_1,\dots,l_\infty^\omega\,\mathrm{form}A_n)$.

Заметим, что $\Phi(G)\cap O_\omega(G)=1$. Действительно, если $\Phi(G)\cap O_\omega(G)\neq 1$, то в силу выбора группы G получаем, что для группы $G/(\Phi(G)\cap O_\omega(G))$ утверждение теоремы верно. Поскольку $G\in\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$ и $\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$ – формация, то

$$G/(\Phi(G)\cap O_\omega(G))\in\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n).$$

Значит, найдутся такие группы $B_1\in\mathfrak{F}_1,\dots,B_n\in\mathfrak{F}_n$, что

$$G/(\Phi(G)\cap O_\omega(G))\in\upsilon(l_\infty^\omega\,\mathrm{form}B_1,\dots,\,l_\infty^\omega\,\mathrm{form}B_n).$$

В силу ω-насыщенности формации

$$\upsilon(l_\infty^\omega\,\mathrm{form}B_1,\dots,l_\infty^\omega\,\mathrm{form}B_n)$$

имеет место

$$G\in\upsilon(l_\infty^\omega\,\mathrm{form}B_1,\dots,l_\infty^\omega\,\mathrm{form}B_n).$$

Противоречие. Таким образом, $\Phi(G)\cap O_\omega(G)=1$.

Пусть $\mathfrak{M}=\upsilon(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$. Покажем, что утверждение теоремы верно, если в терм υ входит всего один символ. Действительно, если $G\in\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2$, то $G\in\mathfrak{F}_i$, $i=1,2$. Следовательно, имеет место

$$G\in l_\infty^\omega\,\mathrm{form}G\cap l_\infty^\omega\,\mathrm{form}G.$$

Пусть $G\in\mathfrak{F}_1\vee_\infty^\omega\mathfrak{F}_2=\mathfrak{M}$. Предположим, что G – монолитическая группа.

Пусть сначала $P=\mathrm{Soc}(G)$ – неабелева группа или абелева ω'-группа. Положим $\pi=\pi(\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2))\cap\omega$. В силу леммы 7 (для тривиального подгруппового функтора τ) формация $\mathfrak{S}_\pi\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2)\in l_\infty^\omega$. Следовательно,

$$\mathfrak{F}_1\vee_\infty^\omega\mathfrak{F}_2=l_\infty^\omega\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2)\subseteq\mathfrak{S}_\pi\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2).$$

Поэтому $G\in\mathfrak{S}_\pi\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2)$. Так как $P=\mathrm{Soc}(G)$ является неабелевой группой или абелевой ω'-группой, то

$$G\in\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2)=\mathfrak{F}_1\vee\mathfrak{F}_2.$$

Ввиду леммы 8 существуют такие группы $G_1\in\mathfrak{F}_1$ и $G_2\in\mathfrak{F}_2$, что

$$G\in\mathrm{form}G_1\vee\mathrm{form}G_2.$$

Поэтому ввиду включения

$$\mathrm{form}G_1\vee\mathrm{form}G_2\subseteq l_\infty^\omega\,\mathrm{form}G_1\vee_\infty^\omega l_\infty^\omega\,\mathrm{form}G_2$$

имеем

$$G\in l_\infty^\omega\,\mathrm{form}G_1\vee_\infty^\omega l_\infty^\omega\,\mathrm{form}G_2.$$

Пусть теперь P – абелева p-группа для некоторого простого числа $p\in\omega$. Поскольку $\Phi(G)\cap O_\omega(G)=1$, то $P\not\subset\Phi(G)$ и $P=C_G(P)=F_p(G)=F(G)=O_p(G)$. Так как $G\in\mathfrak{M}$, то в силу леммы 9 (для тривиального подгруппового функтора τ) имеем

$$G/P=G/F_p(G)\in\mathfrak{M}_\infty^\omega(p).$$

Ввиду леммы 10 (для тривиального подгруппового функтора τ) справедливо равенство

$$\mathfrak{M}^{\omega}_{\infty}(p) = \mathfrak{F}^{\omega}_{1\infty}(p) \vee^{\omega}_{\infty} \mathfrak{F}^{\omega}_{2\infty}(p).$$

Поскольку $|G/F_p(G)| < |G|$, то по индукции для группы $G/F_p(G)$ теорема верна. Поэтому найдутся такие группы $D_1 \in \mathfrak{F}^{\omega}_{1\infty}(p)$ и $D_2 \in \mathfrak{F}^{\omega}_{2\infty}(p)$, что

$$G/F_p(G) \in l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}D_1 \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}D_2.$$

Пусть $C_i = D_i/O_p(D_i)$, $i \in 1, 2$. Тогда $D_i \in \mathfrak{N}_p l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_i$. Ввиду леммы 11 (для тривиального подгруппового функтора τ) $\mathfrak{N}_p l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_i \in l^{\omega}_{\infty}$, $i \in 1, 2$. Следовательно,

$$l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}D_i \subseteq \mathfrak{N}_p l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_i,$$

где $i \in 1, 2$. Применяя теперь лемму 21, получаем следующее включение:

$$l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}D_1 \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}D_2 \subseteq \mathfrak{N}_p l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_1 \vee^{\omega}_{\infty} \mathfrak{N}_p l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_2.$$

Далее, ввиду леммы 19 имеет место равенство

$$\mathfrak{N}_p l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_1 \vee^{\omega}_{\infty} \mathfrak{N}_p l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_2 = \mathfrak{N}_p (l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_1 \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_2).$$

Значит,

$$G/P = G/F_p(G) \in \mathfrak{N}_p (l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_1 \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_2).$$

Так как $P = O_p(G)$, то $O_p(G/P) = 1$. Поэтому

$$G/P \in l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_1 \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_2.$$

Пусть $R_i = Z_p\, wr\, C_i = [K_i]C_i$, где Z_p – группа порядка p, K_i – база регулярного сплетения R_i, $i = 1, 2$. Поскольку $O_p(C_i) = 1$, то ввиду леммы 12 имеем

$$F_p(R_i) = F(R_i) = O_p(R_i) = K_i,$$

где $i = 1, 2$. Так как

$$R_i/O_p(R_i) = R_i/K_i \cong C_i \in l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}D_i \subseteq \mathfrak{F}^{\omega}_{i\infty}(p),$$

то в силу леммы 13 имеем $R_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Пусть, далее, $\mathfrak{X}_i = l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}R_i$, $i = 1, 2$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{X}_1 \vee^{\omega}_{\infty} \mathfrak{X}_2$. По лемме 10 (для тривиального подгруппового функтора τ)

$$\mathfrak{L}^{\omega}_{\infty} = \mathfrak{X}^{\omega}_{1\infty} \vee^{\omega}_{\infty} \mathfrak{X}^{\omega}_{2\infty}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{L}^{\omega}_{\infty}(p) = \mathfrak{X}^{\omega}_{1\infty}(p) \vee^{\omega}_{\infty} \mathfrak{X}^{\omega}_{2\infty}(p) =$$

$$= l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}(R_1/F_p(R_1)) \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}(R_2/F_p(R_2)) =$$

$$= l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_1 \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}C_2.$$

Значит,

$$G/O_p(G) = G/P \in \mathfrak{L}^{\omega}_{\infty}(p).$$

В силу леммы 13

$$G \in \mathfrak{L} = \mathfrak{X}_1 \vee^{\omega}_{\infty} \mathfrak{X}_2 = l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}R_1 \vee^{\omega}_{\infty} l^{\omega}_{\infty}\,\mathrm{form}R_2.$$

Пусть теперь G не является монолитической группой и

$$\mathrm{Soc}(G) = N_1 \times \ldots \times N_k,$$

где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i = 1, \ldots, k$ $(k \in \mathrm{N}, k \geq 2)$. Обозначим через M_i наибольшую нормальную подгруппу группы G, содержащую

$N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$ и не содержащую N_i. Ввиду леммы 14 группа $B_i = G/M_i$ является монолитической и ее монолит $N_i M_i / M_i$ G-изоморфен N_i и $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$. Поскольку $B_i \in \mathfrak{M} = \mathfrak{F}_1 \vee_\infty^\omega \mathfrak{F}_2$ и $|B_i| < |G|$, то по индукции для группы B_i найдутся такие группы $S_{i1} \in \mathfrak{F}_1$ и $S_{i2} \in \mathfrak{F}_2$, что

$$B_i \in l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i1} \vee_\infty^\omega l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i2},$$

где $i \in I = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Положим $S_1 = S_{11} \times S_{21} \times \ldots \times S_{k1}$ и $S_2 = S_{12} \times S_{22} \times \ldots \times S_{k2}$. Поскольку $S_{i1} \in \mathfrak{F}_1$ и $S_{i2} \in \mathfrak{F}_2$ при любом $i \in I$, то $S_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $S_2 \in \mathfrak{F}_2$. Так как $S_{i1} \in l_\infty^\omega \operatorname{form} S_1$ и $S_{i2} \in l_\infty^\omega \operatorname{form} S_2$ для любого $i \in I$, то

$$l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i1} \subseteq l_\infty^\omega \operatorname{form} S_1,\ l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i2} \subseteq l_\infty^\omega \operatorname{form} S_2.$$

Учитывая лемму 21, заключаем, что для любого $i \in I$ имеет место включение

$$l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i1} \vee_\infty^\omega l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i2} \subseteq l_\infty^\omega \operatorname{form} S_1 \vee_\infty^\omega l_\infty^\omega \operatorname{form} S_2.$$

Далее, из условия $B_i = G/M_i \in l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i1} \vee_\infty^\omega l_\infty^\omega \operatorname{form} S_{i2}$ в силу леммы 14 следует, что

$$G \in l_\infty^\omega \operatorname{form} S_1 \vee_\infty^\omega l_\infty^\omega \operatorname{form} S_2$$

как подпрямое произведение групп, изоморфных группам $B_1, \ldots, B_k$. Этим самым доказано утверждение теоремы для случая, когда в терм υ входит один символ.

Таким образом, можно считать, что число t вхождений символов из $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$ в терм $\upsilon(x_1, \ldots, x_n)$ больше 1 и для термов с меньшим числом вхождений утверждение теоремы верно. Пусть терм υ имеет вид

$$\upsilon_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \Delta \upsilon_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_\infty^\omega\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Имеем

$$G \in \upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) \Delta \upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_s}).$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ формацию $\upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})$, а через $\mathfrak{H}_2$ – формацию $\upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})$. Тогда $G \in \mathfrak{H}_1 \Delta \mathfrak{H}_2$, и, ввиду доказанной части утверждения, существуют такие группы $H_1 \in \mathfrak{H}_1$ и $H_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$G \in l_\infty^\omega \operatorname{form} H_1 \Delta l_\infty^\omega \operatorname{form} H_2.$$

В каждом из термов υ_1 и υ_2 число вхождений символов из $\{\cap, \vee_\infty^\omega\}$ меньше t. Следовательно, исходя из выбора терма υ, для термов υ_1 и υ_2 утверждение теоремы верно. Поэтому найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$, что

$$H_1 \in \upsilon_1(l_\infty^\omega \operatorname{form} A_1, \ldots, l_\infty^\omega \operatorname{form} A_r),$$

$$H_2 \in \upsilon_2(l_\infty^\omega \operatorname{form} B_1, \ldots, l_\infty^\omega \operatorname{form} B_s).$$

Пусть $\Omega = \{x_{i_1},\dots,x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1},\dots,x_{j_s}\}$. Положим $R_{i_k} = A_k$, если $x_{i_k} \notin \Omega$, $R_{i_k} = P_{j_m} = A_k \times B_m$, если $x_{i_k} = x_{j_m} \in \Omega$ и $P_{j_m} = B_m$, если $x_{j_m} \notin \Omega$, $k = 1,\dots,r$, $m = 1,\dots,s$. Ясно, что $R_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ и $P_{j_m} \in \mathfrak{F}_{j_m}$.

Положим $\mathfrak{M}_{i_k} = l_\infty^\omega \operatorname{form} R_{i_k}$, $\mathfrak{M}_{j_m} = l_\infty^\omega \operatorname{form} P_{j_m}$, $k = 1,\dots,r$, $m = 1,\dots,s$. Поскольку для любых $k = 1,\dots,r$, $m = 1,\dots,s$ справедливы включения $l_\infty^\omega \operatorname{form} A_k \subseteq \mathfrak{M}_{i_k}$ и $l_\infty^\omega \operatorname{form} B_m \subseteq \mathfrak{M}_{j_m}$, то в силу леммы 21 имеем

$$\upsilon_1(l_\infty^\omega \operatorname{form} A_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} A_r) \subseteq \upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r}),$$
$$\upsilon_2(l_\infty^\omega \operatorname{form} B_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} B_s) \subseteq \upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Значит, ввиду той же леммы 21 выполняется включение

$$\upsilon_1(l_\infty^\omega \operatorname{form} A_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} A_r)\Delta\upsilon_2(l_\infty^\omega \operatorname{form} B_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} B_s) \subseteq$$
$$\subseteq \upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Из условий $H_1 \in \upsilon_1(l_\infty^\omega \operatorname{form} A_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} A_r)$, $H_2 \in \upsilon_2(l_\infty^\omega \operatorname{form} B_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} B_s)$ следуют включения

$$l_\infty^\omega \operatorname{form} H_1 \subseteq \upsilon_1(l_\infty^\omega \operatorname{form} A_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} A_r),$$
$$l_\infty^\omega \operatorname{form} H_2 \subseteq \upsilon_2(l_\infty^\omega \operatorname{form} B_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} B_s).$$

Снова применяя лемму 21, имеем

$$l_\infty^\omega \operatorname{form} H_1 \Delta l_\infty^\omega \operatorname{form} H_2 \subseteq$$
$$\subseteq \upsilon_1(l_\infty^\omega \operatorname{form} A_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} A_r)\Delta\upsilon_2(l_\infty^\omega \operatorname{form} B_1,\dots,l_\infty^\omega \operatorname{form} B_s).$$

Поэтому справедливо включение

$$l_\infty^\omega \operatorname{form} H_1 \Delta l_\infty^\omega \operatorname{form} H_2 \subseteq \upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Учитывая, что $G \in l_\infty^\omega \operatorname{form} H_1 \Delta l_\infty^\omega \operatorname{form} H_2$, получаем

$$G \in \upsilon_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r})\Delta\upsilon_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s}) = \upsilon(\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_n),$$

где $\mathfrak{M}_i$ – однопорожденная тотально ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1,\dots,n$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. Теорема доказана.

Лемма 22. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп, θ – $\mathfrak{X}$-отделимая решетка формаций, η – полная подрешетка решетки θ. Тогда η является $\mathfrak{X}$-отделимой решеткой формаций.

Доказательство. Пусть $\upsilon_\eta(x_1,\dots,x_n)$ – произвольный терм сигнатуры $\{\cap,\vee_\eta\}$ и группа $A \in \mathfrak{X} \cap \upsilon_\eta(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$, где формация $\mathfrak{F}_i \in \eta$ для любого $i = 1,\dots,n$. Покажем, что существуют такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1,\dots,A_n \in \mathfrak{F}_n$, что

$$A \in \mathfrak{X} \cap \upsilon_\eta(\eta \operatorname{form} A_1,\dots,\eta \operatorname{form} A_n).$$

Пусть $\upsilon_\theta(x_1,\dots,x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap,\vee_\theta\}$, получаемый из терма υ_η заменой каждого вхождения символа $\vee_{\eta}$ на символ $\vee_{\theta}$. Тогда ввиду леммы 15

$$\upsilon_{\eta}(\mathsf{F}_1,\ldots,\mathsf{F}_n)=\upsilon_{\theta}(\mathsf{F}_1,\ldots,\mathsf{F}_n)\in\eta .$$

Поэтому

$$A\in\mathsf{X}\cap\upsilon_{\eta}(\mathsf{F}_1,\ldots,\mathsf{F}_n)=\mathsf{X}\cap\upsilon_{\theta}(\mathsf{F}_1,\ldots,\mathsf{F}_n).$$

Поскольку θ – X -отделимая решетка формаций, то существуют такие X -группы $A_1\in\mathsf{F}_1,\ldots,A_n\in\mathsf{F}_n$, что

$$A\in\upsilon_{\theta}(\theta\operatorname{form}A_1,\ldots,\theta\operatorname{form}A_n).$$

Так как по условию $\eta\subseteq\theta$ и $\mathsf{F}_i\in\eta$, то

$$\theta\operatorname{form}A_i\subseteq\eta\operatorname{form}A_i\subseteq\mathsf{F}_i$$

для любого $i=1,\ldots,n$. Ввиду леммы 20

$$\upsilon_{\theta}(\theta\operatorname{form}A_1,\ldots,\theta\operatorname{form}A_n)\subseteq\upsilon_{\theta}(\eta\operatorname{form}A_1,\ldots,\eta\operatorname{form}A_n).$$

Из леммы 15 следует

$$\upsilon_{\theta}(\eta\operatorname{form}A_1,\ldots,\eta\operatorname{form}A_n)=\upsilon_{\eta}(\eta\operatorname{form}A_1,\ldots,\eta\operatorname{form}A_n).$$

Тогда из последнего соотношения и предыдущего включения, учитывая, что

$$A\in\upsilon_{\theta}(\theta\operatorname{form}A_1,\ldots,\theta\operatorname{form}A_n),\ A\in\mathsf{X},$$

окончательно получаем

$$A\in\mathsf{X}\cap\upsilon_{\eta}(\eta\operatorname{form}A_1,\ldots,\eta\operatorname{form}A_n).$$

Таким образом, полная решетка формаций θ – X -отделима. Лемма доказана.

Учитывая теорему 3 и лемму 1, из леммы 22 получаем следующую теорему.

Теорема 4 [Сафонов, Сафонова, 2017]. Решетка $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций является G -отделимой.

Отметим основные следствия теоремы 4.

Если τ – единичный подгрупповой функтор, то из теоремы 4 вытекает

Следствие 8. Решетка всех наследственных тотально ω-насыщенных формаций является G -отделимой.

Если $\tau(G) = S_n\{G\}$ для любой группы G, то из теоремы 4 получаем

Следствие 9. Решетка всех нормально наследственных тотально ω-насыщенных формаций является G -отделимой.

Если $\omega=\{p\}$, то из теоремы 4 имеем

Следствие 10. Решетка $l^{\tau}_{p_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально p -насыщенных формаций является G -отделимой.

Если $\omega = \mathsf{P}$ – множество всех простых чисел, то из теоремы 4 вытекает

Следствие 11 [Safonov, 2010]. Решетка l^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций является G -отделимой.

Заключение

В работе изучены некоторые свойства решетки функторно замкнутых частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Исходя из вложимости для произвольного подгруппового функтора τ решетки всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций в решетку всех тотально ω-насыщенных формаций, показано, что решетка всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп является модулярной и алгебраической. Доказана G -отделимость решетки всех тотально ω-насыщенных формаций. Аналогичный результат установлен для решетки всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций. В качестве следствия полученных результатов установлены модулярность, алгебраичность и G -отделимость решетки всех

τ-замкнутых тотально p-насыщенных формаций, а также решетки всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории частично насыщенных формаций конечных групп.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция» 1.1.03.02).

Список литературы
References

1. Биркгоф Г. 1984. Теория решеток. Пер. с англ. М., Наука, 568.

Birkhoff G. 1973. Lattice Theory. Providence, RI, American Mathematical Society, 418 (in Russian).

2. Воробьев Н.Н. 2000. Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга. Доклады НАН Беларуси, 44 (3): 21–24.

Vorob'ev N.N. 2000. Ob induktivnykh reshetkakh formatsiy i klassov Fittinga [On inductive lattices of formations and Fitting classes]. Doklady NAN Belarusi, 44 (3): 21–24.

3. Воробьев Н.Н. 2012. Алгебра классов конечных групп. Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова, 322.

Vorob'ev N.N. 2012. Algebra klassov konechnykh grupp [Algebra of Classes of Finite Groups]. Vitebsk, Vitebsk State University named after P.M. Masherov, 322.

4. Воробьев Н.Н., Скиба А.Н., Шеметков Л.А. 2009. О тождествах решеток частично насыщенных формаций. Доклады НАН Беларуси, 53 (1): 15–18.

Vorob'ev N.N., Skiba A.N., Shemetkov L.A. 2009. O tozhdestvakh reshetok chastichno nasyshchennykh formatsiy [On laws of lattices of partially saturated formations]. Doklady NAN Belarusi, 53 (1): 15–18.

5. Сафонов В.Г. 2004. О тотально ω-насыщенных формациях конечных групп. Препринт, № 7. Гомель, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 18.

Safonov V.G. 2004. O total'no ω-nasyshchennykh formatsiyakh konechnykh grupp. Preprint, № 7 [On totally ω-saturated formations of finite groups. Preprint, No. 7]. Gomel, Gomel University Press, 18.

6. Сафонов В.Г. 2008. К теории тотально насыщенных формаций конечных групп. Препринт, № 15. Гомель, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, 34.

Safonov V.G. 2008. K teorii total'no nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp. Preprint, № 15 [On the theory of totally saturated formations of finite groups. Preprint, No. 15]. Gomel, Gomel University Press, 34.

7. Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. 2014. О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп. Вестник Витебского государственного университета, 84 (6): 9–15.

Safonov V.G., Safonova I.N. 2014. O minimal'nykh total'no ω-nasyshchennykh nenil'potentnykh formatsiyakh konechnykh grupp [On minimal totally ω-saturated non-nilpotent formations of finite groups]. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta, 84 (6): 9–15.

8. Сафонов В.Г., Сафонова И.Н. 2017. Отделимость решетки τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп. Проблемы физики, математики и техники, 33 (4): 76–83.

Safonov V.G., Safonova I.N. 2017. Otdelimost' reshetki τ-zamknutykh total'no ω-nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Separability of the lattice of τ-closed totally ω-saturated formations of finite groups]. Problems of Physics, Mathematics and Technics, 33 (4): 76–83.

9. Сафонов В.Г., Шеметков Л.А. 2008. О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп. Доклады НАН Беларуси, 52 (4): 34–37.

Safonov V.G., Shemetkov L.A. 2008. O podreshetkakh reshetki total'no nasyshchennykh formatsiy konechnykh grupp [Sublattices of the lattice of totally saturated formations of finite groups]. Doklady NAN Belarusi, 52 (4): 34–37.

10. Скиба А.Н. 1986. О локальных формациях длины 5. В кн.: Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск, Наука и техника: 135–149.

Skiba A.N. 1986. O lokal'nykh formatsiyakh dliny 5. V kn.: Arifmeticheskoe i podgruppovoe stroenie konechnykh grupp [On local formations of length 5. In: Arithmetic and subgroup structure of finite groups]. Minsk, Nauka i tekhnika: 135–149.

11. Скиба А.Н. 1997. Алгебра формаций. Минск, Беларуская навука, 240.

Skiba A.N. 1997. Algebra formatsiy [Algebra of Formations]. Minsk, Belaruskaya navuka, 240.

12. Шабалина И.П. 2002. Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций. Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18, 5 (14): 59–67.

Shabalina I.P. 2002. Algebraichnost' reshetki τ-zamknutykh n-kratno ω-lokal'nykh formatsiy [The algebraicity of the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations]. Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta im. F. Skoriny. Voprosy algebry-18, 5 (14): 59–67.

13. Шабалина И.П. 2003. О решетке τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций конечных групп. Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук, 1: 28–30.

Shabalina I.P. 2003. O reshetke τ-zamknutykh n-kratno ω-lokal'nykh formatsiy konechnykh grupp [On the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations of finite groups]. Izvestiya NAN Belarusi. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk, 1: 28–30. (in Russian)

14. Шеметков Л.А. 1978. Формации конечных групп. М., Наука, 267.

Shemetkov L.A. 1978. Formatsii konechnykh grupp [Formations of Finite Groups]. Moscow, Nauka, 267.

15. Шеметков Л.А, Скиба А.Н. 1989. Формации алгебраических систем. М., Наука, 253.

Shemetkov L.A, Skiba A.N. 1989. Formatsii algebraicheskikh sistem [Formations of Algebraic Systems]. Moscow, Nauka, 253.

16. Щербина В.В., Сафонов В.Г. 2019. О подрешетках решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, 51 (1): 64–87.

Shcherbina V.V., Safonov V.G. 2019. On sublattices of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (1): 64–87 (in Russian).

17. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. 2006. Classes of Finite Groups. Dordrecht, Springer, 2006, 385.

18. Doerk K., Hawkes T. 1992. Finite Soluble Groups. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 889.

19. Guo, W. 2000. The Theory of Classes of Groups. Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London, Science Press, Kluwer Academic Publishers, 2000, 261.

20. Guo, W. 2015. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. Berlin, Heidelberg, Springer, 359.

21. Safonov V.G. 2006. On the modularity of a lattice of τ-closed totally saturated formations of finite groups. Ukrainian Mathematical Journal, 58 (6): 967-973.

22. Safonov V.G. 2006. The property of being algebraic for the lattice of all τ-closed totally saturated formations. Algebra and Logic, 45 (5): 353–356.

23. Safonov V.G. 2007. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. Siberian Mathematical Journal, 48 (1): 150–155.

24. Safonov V.G. 2010. G-separability of the lattice of τ-closed totally saturated formations. Algebra and Logic, 49 (5): 470–479.

25. Skiba A.N., Shemetkov L.A. 2000. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. Siberian Advances in Mathematics, 10 (2): 112–141.

26. Shemetkov L.A., Skiba A.N., Vorob'ev N.N. 2009. On laws of lattices of partially saturated formations. Asian-European Journal of Mathematics, 2 (1): 155–169.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Щербина В.В., Сафонов В.Г. 2019. О некоторых свойствах решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 227–244. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.

Shcherbina V.V., Safonov V.G. 2019. On some properties of the lattice of partially totally saturated formations of finite groups. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 227–244 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-227-244.