УДК 517.956
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-15-20

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ НА ГРАНИЦЕ

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SINGULAR SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION ON A BOUNDED DOMAIN WITH BOUNDARY ANGULAR POINTS

А.А. Ларин
A.A. Larin

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж),
Россия, Воронежская область, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А

Military Educational-Research Centre of Air Force «Air Force Academy named after professors N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin» (Voronezh),
54A str. Starih boljshevikov, Voronezh, 394064, Russian Federation

E-mail: DOHIOR@yandex.ru

Аннотация

В работе рассматривается сингулярное эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Оно изучается в ограниченной плоской области с угловыми точками на границе. Сингулярный тип уравнения определяется особенностями в его коэффициентах. Дифференциальное уравнение содержит оператор Бесселя по особой переменной. Постановки задач используют специальные функции гипергеометрического типа, а именно, присоединённые функции Лежандра, через которые выражается искомое решение. Применяемые функциональные пространства со смешанной нормой относятся к классу пространств Соболева – Киприянова с дополнительными граничными условиями. Находятся условия корректной разрешимости изучаемой задачи в указанных весовых функциональных пространствах.

Abstract

In the paper we consider a singular elliptic partial differential equation of the second order. It is studied on a bounded plain domain with boundary corner points. A type of the differential equation is defined by its singular coefficients. A differential equation contains the Bessel operator acting by a special variable. Problems formulations use special functions of hypergeometric type, namely adjoint Legendre functions for solutions representations. The applied functional spaces with mixed norms are of Sobolev-Kipriyanov class with additional boundary conditions. Also a priori estimates are proved for solutions of considered differential equations with boundary conditions in functional spaces. A plan is outlined for solving representation formulas for problem solutions in terms of series in adjoint Legendre functions. The result is proved on correctness of the problem considered in weighted functional spaces. The procedure includes such steps as a proper special change of variables, application of Fourier transform, consideration of the Green function for some special ordinary type differential equation with complex parameter, which is considered on the strip of the plane in new variables.

Ключевые слова: сингулярный, эллиптическая краевая задача, присоединённая функция Лежандра.
Keywords: **s**ingular, elliptic boundary value problem, adjoint Legendre function.

В статье рассматривается краевая задача с однородным граничным условием для модельного $B-$эллиптического уравнения [Сингулярные…, 1997, с. 120] вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{k}{y}\,\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y),\ k>0,$$

в ограниченной плоской области, расположенной в полуплоскости $y>0$ и прилегающей к линии $y=0,$ граница которой содержит угловые точки, расположенные на этой линии. Устанавливается корректная разрешимость изучаемой задачи в весовых пространствах специального вида. Результаты работ Ларина [2000, 2012] о корректной разрешимости подобной задачи для случая плоского угла в данной статье переносятся на случай ограниченной области. Для эллиптических уравнений с гладкими коэффициентами систематическое изложение теории краевых задач в областях с негладкой границей дано в фундаментальной работе В.А. Кондратьева [1967] и работах других авторов [Elliptic…, 1985, 1988; Эллиптические…, 1991; Elliptic…, 1997; Spectral…, 2001].

Перейдём к изложению полученных результатов.

Пусть $\Omega-$ограниченная область в полуплоскости $E_2^+=\{(x,y)\in E_2 : y>0\}$, граница которой состоит из двух частей Γ^0 и Γ^+, где Γ^0- интервал оси Ox с граничными точками $O_1=O_1(x_1,0)$ и $O_2=O_2(x_2,0)$, $x_1<x_2$, а Γ^+- её оставшаяся часть, имеющая с линией $y=0$ общими точками лишь точки O_1 и O_2. Обозначим через $B_\delta(M)$ открытый круг радиуса δ с центром в точке $M\in E_2$. Будем предполагать, что Γ^+- гладкая кривая (класса C^∞) и что существует число $\delta>0$ такое, что множества $\Omega\cap B_\delta(O_1)$ и $\Omega\cap B_\delta(O_2)$ представляют собой круговые секторы растворов ω_1 и ω_2 соответственно, $\omega_1\in(0,\pi)$, $\omega_2\in(0,\pi)$.

Помимо области Ω рассмотрим в плоскости E_2 бесконечные углы K_1 и K_2 с вершинами O_1 и O_2 соответственно, такие, что $\Omega\cap B_\delta(O_i)=K_i\cap B_\delta(O_i)$, $i=1,2.$ Граница ∂K_1 угла K_1 состоит из луча $\Gamma_1^0=\{(x,0)\in E_2 : x>x_1\}$ и замкнутого луча $\Gamma_1^+=\partial K_1\setminus\Gamma_1^0$. Граница ∂K_2 угла K_2 состоит из луча $\Gamma_2^0=\{(x,0)\in E_2 : x<x_2\}$ и замкнутого луча $\Gamma_2^+=\partial K_2\setminus\Gamma_2^0$.

Всюду в дальнейшем черта сверху над символом множества из E_2 будет обозначать замыкание этого множества в E_2.

Символом $C_+^\infty(\overline{K_1})$ обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых в $\overline{K_1}$ функций, которые чётны по переменной y и имеют компактные в $\overline{K_1}\setminus O_1$ носители. Под условием чётности по переменной y бесконечно дифференцируемой функции $u(x,y)$ мы понимаем условие $\partial^{2p-1}u/\partial y^{2p-1}\big|_{y=0}=0,\ p\in N,$ выполняющееся для всех допустимых $x,$ в данном случае для всех $x>x_1$. Символом $\dot{C}_+^\infty(\overline{K_1})$ обозначим подмножество $C_+^\infty(\overline{K_1})$, состоящее из всех функций, обращающихся в ноль на Γ_1^+. Аналогично вводятся множества функций $C_+^\infty(\overline{K_2}), \dot{C}_+^\infty(\overline{K_2}), C_+^\infty(\overline{\Omega}), \dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$. Носители функций из множеств $C_+^\infty(\overline{\Omega})$ и $\dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$ содержатся в $\overline{\Omega}\setminus(O_1\cup O_2)$, а условие чётности должно выполняться для всех $x\in(x_1,x_2)$.

Определим теперь весовые функциональные пространства, в терминах которых будет изучаться краевая задача.

Для произвольных вещественных чисел β_1,β_2 и целого $s\geq 0$ введём в рассмотрение пространства $V_{\beta_i}^s(K_i), \dot{V}_{\beta_i}^s(K_i), i=1,2$. Пространство $V_{\beta_1}^s(K_1)$ является пополнением множества $C_+^\infty(\overline{K_1})$ по норме

$$\| u \|_{V_{\beta_1}^s(K_1)}=\left(\sum_{\substack{q+2m+p\leq s,\\ p\leq 1}}\int_{K_1}\left| D_x^q D_y^p B_y^m u\right|^2 r_1^{2(\beta-s+q+2m+p)}\; y^k dydx\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где $D_x^q u=\partial^q u/\partial x^q$, $D_y^1 u=\partial u/\partial y$, $D_y^0 u=u$, $B_y u=\partial^2 u/\partial y^2+k\;\partial u/(y\partial y)$, $k>0$, $B_y^m u=B_y\left(B_y^{m-1}u\right)$, $m\geq 2$, $r_1=\left((x-x_1)^2+y^2\right)^{1/2}$. Пространство $\dot{V}_{\beta_1}^s(K_1)$ определим как пополнение по той же норме множества $\dot{C}_+^\infty(\overline{K_1})$. Функциональные пространства $V_{\beta_2}^s(K_2)$ и $\dot{V}_{\beta_2}^s(K_2)$, $s\geq 0$, определяются аналогично, следует лишь заменить в формуле (1) K_1 на K_2, r_1 на $r_2=((x-x_2)^2+y^2)^{1/2}$ и β_1 на β_2. Пополняемыми множествами при этом являются множества $C_+^\infty(\overline{K_2})$ и $\dot{C}_+^\infty(\overline{K_2})$, соответственно.

Пространства $W^s(\Omega)$, $s\in N\cup\{0\}$, определим как пополнение множества $C_+^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{W^s(\Omega)}=\left(\sum_{\substack{q+2m+p\leq s,\\ p\leq 1}}\int_\Omega\left|D_x^q D_y^p B_y^m u\right|^2 y^k dydx\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Пространства $\dot{W}^s(\Omega)\subset W^s(\Omega)$ определяются как пополнение по норме (2) множества $\dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$.

Пусть $\tau_1=\tau_1(x,y)$ и $\tau_2=\tau_2(x,y)-$срезающие функции класса $C_0^\infty(E_2)$, такие, что для некоторого $\eta>0$ выполняются условия $\partial\tau_i/\partial y=0$, $|y|<\eta$, $i=1,2$, причём $\tau_i=1$ в $B_{\delta/2}(O_i)$, $\operatorname{supp}\tau_i\subset B_\delta(O_i)$, $i=1,2$, и пусть $\tau_0=1-\tau_1-\tau_2$. Через $W_{\beta_1,\beta_2}^s(\Omega)$, $s\in N\cup\{0\}$, обозначим функциональное пространство, получающееся пополнением множества $C_+^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{W_{\beta_1,\beta_2}^s(\Omega)}=\|\tau_0 u\|_{W^s(\Omega)}+\|\tau_1 u\|_{V_{\beta_1}^s(K_1)}+\|\tau_2 u\|_{V_{\beta_2}^s(K_2)}. \tag{3}$$

Символом $\dot{W}_{\beta_1,\beta_2}^s(\Omega)$, $s\in N\cup\{0\}$, обозначим функциональное пространство, получающееся пополнением по той же норме множества функций $\dot{C}_+^\infty(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим теперь в области Ω краевую задачу вида

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=f, \tag{4}$$

$$(x,y)\in\Omega,$$

$$u|_{\Gamma^+}=0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma^0}=0\,, \tag{5}$$

где $f\in W^s_{\beta_1,\beta_2}(\Omega),\ s\in N\cup\{0\}$.

Везде далее будем предполагать, что фиксированный параметр $k>1$ и не является нечетным числом.

Под решением краевой задачи (4), (5) из класса $\dot{W}^{s+2}_{\beta_1,\beta_2}(\Omega),\ s\in N\cup\{0\},$ будем понимать функцию $u\in\dot{W}^{s+2}_{\beta_1,\beta_2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (4) почти всюду в Ω.

Пусть $P^\mu_\nu(z)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода, определенная на разрезе, связанная с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$ соотношением [Высшие…, 1973, с. 144]

$$P^\mu_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right),$$

где символом $\Gamma(l)$ обозначена гамма-функция Эйлера аргумента l, и пусть $m_1^{(i)},\ i=1,2,$ – наименьшие положительные решения уравнений

$$\varphi_i(m)=P^{(1-k)/2}_{m+(k-1)/2}\left(\cos\omega_i\right)=0,\ i=1,2\ \text{[Теория…, 1952, с. 388].}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть s – целое неотрицательное число и пусть вещественные параметры β_1 и β_2 удовлетворяет условиям $|\beta_i-s-1|<m_1^{(i)}+k/2,\ i=1,2.$ Тогда для любой функции $f\in W^s_{\beta_1,\beta_2}(\Omega)$ существует единственное решение $u\in\dot{W}^{s+2}_{\beta_1,\beta_2}(\Omega)$ краевой задачи (4), (5) и справедливо неравенство

$$\|u\|_{W^{s+2}_{\beta_1,\beta_2}(\Omega)}\le C\|f\|_{W^s_{\beta_1,\beta_2}(\Omega)},$$

в котором постоянная C не зависит от функции f.

Для доказательства теоремы используются предыдущие работы автора [Ларин, 2000, 2012] и следующее утверждение о соотношении решений u_1 и u_2 задачи вида (4), (5) в бесконечном угле K (типа углов $K_i,\ i=1,2$), принадлежащих пространствам $\dot{V}^{s+2}_{\gamma_1}(K)$ и $\dot{V}^{s+2}_{\gamma_2}(K)$, соответственно. Сформулируем его для угла $K=K_1$.

Пусть $m_j^{(1)},\ j=1,2,\dots,$ – все положительные решения уравнения

$$\varphi_1(m)=P^{(1-k)/2}_{m+(k-1)/2}\left(\cos\omega_1\right)=0,$$

которые мы для удобства будем считать занумерованными в порядке возрастания, и пусть r_1, $\theta-$ полярные координаты с центром в точке O_1,

$$r_1=((x-x_1)^2+y^2)^{1/2},\ r_1\geq 0,\ 0<\theta\leq\omega_1,\ \Phi_j^{(1)}(\theta)=(\sin\theta)^{(1-k)/2}\,P^{(1-k)/2}_{m_j^{(1)}+(k-1)/2}\,(\cos\theta),$$

$$0<\theta\leq\omega_1,\ j=1,2,\ldots.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть s – целое неотрицательное число и пусть вещественные параметры γ_1 и γ_2, $\gamma_1<\gamma_2$, удовлетворяют условиям

$$\left|\gamma_1-s-1\right|\neq m_j^{(1)}+k/2,\ \left|\gamma_2-s-1\right|\neq m_j^{(1)}+k/2\ ,\ j=1,2,\ldots.$$

Тогда для любой функции $f\in V^s_{\gamma_1}(K_1)\cap V^s_{\gamma_2}(K_1)$ в каждом из пространств $\dot{V}^{s+2}_{\gamma_i}(K_1),\ i=1,2,$ существует единственное решение $u_i(x,y),\ i=1,2,$ краевой задачи (4), (5) в угле K_1, которые связаны соотношением

$$u_1(x,y)\ =\ u_2(x,y)\ +\sum_{m_j^{(1)}\in(\gamma_1-s-1-\frac{k}{2},\ \gamma_2-s-1-\frac{k}{2})}A_j^{(1)}(f)\,r_1^{-m_j^{(1)}-k}\,\Phi_j^{(1)}(\theta)\ +$$

$$+\sum_{m_j^{(1)}\in(s+1-\gamma_2-\frac{k}{2},\ s+1-\gamma_1-\frac{k}{2})}B_j^{(1)}(f)\,r_1^{m_j^{(1)}}\,\Phi_j^{(1)}(\theta),$$

где $A_j^{(1)}(f)$ и $B_j^{(1)}(f),\ j=1,2,\ldots,$ – непрерывные функционалы над $V^s_{\gamma_1}(K_1)\cap V^s_{\gamma_2}(K_1)$.

Последнее утверждение доказывается с помощью перехода от задачи вида (4), (5) в угле с помощью замены переменных $x=x_1+e^t\cos\theta,\ y=e^t\sin\theta$ к соответствующей задаче в полосе [Ларин, 2012]. После применения комплексного преобразования Фурье по переменной t дело сводится к нахождению вычетов функции Грина специальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора, зависящего от комплексного параметра и действующего по переменной θ, в её полюсах.

Отметим, что результаты, полученные в настоящей работе, могут быть применены в теории операторов преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с операторами Бесселя [Sitnik…1992, 2017; The Transmutations…2018; Applications… 2018].

Заключение

В работе изучается сингулярное эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в ограниченной плоской области с угловыми точками на границе. Сингулярный тип уравнения определяется особенностями в его коэффициентах, при этом дифференциальное уравнение содержит оператор Бесселя по особой переменной. Постановки задач используют специальные функции гипергеометрического типа, а именно, присоединённые функции Лежандра, через которые выражается искомое решение. Далее определяются функциональные пространства специального типа со смешанной нормой, которые относятся к классу пространств Соболева – Киприянова с дополнительными граничными условиями. Они заключаются в том, что на границе области задаются краевые условия Дирихле и Неймана. В работе получены следующие результаты: находятся условия для корректной разрешимости изучаемой задачи в указанных весовых функциональных пространствах; доказана априорная оценка решений рассматриваемого сингулярного дифференциального уравнения во введённых весовых функциональных пространствах, получены представления решений этого уравнения с краевыми условиями в виде ряда по присоединённым функциям Лежандра; указаны возможные приложения результатов в теории операторов преобразования.

Список литературы
References

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., Наука: 296 с.

Bateman H., Erdelyi A. 1973. Vy sshie transcendentny e funkcii. T. 1. [Higher transcendental functions. V. 1]. M., Nauka: 296 p. (in Russian).

2. Гобсон Е.В. 1952. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ: 476 с.

Hobson E.W. 1952. Teoriia sfericheskikh i e llipsoidal ny kh funkcii [The theory of spherical and ellipsoidal functions]. M., IL: 476 p. (in Russian).

3. Киприянов И.А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука: 208 с.

Kiprijanov I.A. 1997. Singuliarny e e llipticheskie kraevy e zadachi [Singular elliptic boundary value problems]. M., Nauka: 208 p. (in Russian).

4. Кондратьев В.А. 1967. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. Тр. Моск. мат. о-ва, 16: 209-292.

Kondrat ev V.A. 1967. Kraevy e zadachi dlia e llipticheskikh uravnenii v oblastiakh s konicheskimi i uglovy mi tochkami [Boundary value problems to elliptic equations on domains with conical and angular points]. Tr. Mosk. mat. o-va, 16: 209-292.

5. Ларин А.А. 2000. Об одной краевой задаче в плоском угле для сингулярного эллиптического уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения, 36(12): 1687-1694.

Larin A.A. 2000. Ob odnoi kraevoi zadache v ploskom ugle dlia singuliarnogo e llipticheskо-go uravneniia vtorogo poriadka [On a boundary value problem on a plain angle for the singular elliptic equation of the second order]. Differentcialny e uravneniia, 36(12): 1687-1694.

6. Ларин А.А. 2012. Неоднородная краевая задача в плоском угле для сингулярного эллиптического уравнения второго порядка. Дифференциальные уравнения, 48(2): 217-226.

Larin A.A. 2012. Neodnorodnaia kraevaia zadacha v ploskom ugle dlia singuliarnogo e llip ticheskogo uravneniia vtorogo poriadka [An nonhomogeneous boundary value problem on a plain angle for the singular elliptic equation of the second order]. Differentcialnye uravneniia, 48(2): 217-226.

7. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. 1991. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М., Наука: 336 с.

Nazarov S.A., Plamenevskij B.A. 1991. E llipticheskie zadachi v oblastiakh s kusochno-gladkoi granicei [Elliptic problems on domains with piecewise smooth boundaries]. M., Nauka: 336 p. (in Russian).

8. Dauge M. 1988. Elliptic boundary value problems in corner domains smoothness and asymptotics of solutions. Lecture Notes in Mathematics. V. 1341. 258 p.

9. Grisvard P. 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. Monographs and Studies in Mathematics. 21. Pitman. 410 p.

10. Kozlov V.A., Maz ya V.G., Rossman J. 1997. Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. AMS. Mathematical Surveys and Monographs. V. 52. 414 p.

11. Kozlov V.A., Maz ya V.G., Rossman J. 2001. Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations. AMS. Mathematical Surveys and Monographs. V. 85

12. Katrakhov V.V., Sitnik S.M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. V. 64(2): 211-426.

13. Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E.L., Sitnik S.M. 2018. Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations. Electron. J. Differential Equations. V. 2018 (130): 1-27.

14. Sitnik S.M. 2017. A short survey of recent results on Buschman-Erdelyi transmutations. Journal of Inequalities and Special Functions. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions). V. 8(1): 140-157.

15. Sitnik S.M. 1992. Factorization and estimates of the norms of Buschman-Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces. Soviet Mathematics Doklades. V. 44(2): 641-646.