УДК 517.925
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202

О БИФУРКАЦИЯХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

ON BIFURCATIONS OF HOMOGENEOUS POLINOMIAL VECTOR FIELDS ON THE PLANE

В.Ш. Ройтенберг
V.Sh. Roitenberg

Ярославский государственный технический университет
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский пр. 88

Yaroslavl State Technical University, Russia, 88 Moskovskij pr.,Yaroslavl, 150023, Russia

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются векторные поля на плоскости, компоненты которых являются однородными полиномами степени n. Множество HP_n таких векторных полей отождествляется с $2n+2$-мерным пространством коэффициентов этих полиномов. Фазовые портреты векторных полей из HP_n рассматриваются на проективной плоскости. Грубые векторные поля X, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к векторному полю, достаточно близкому к X в HP_n, образуют в HP_n открытое всюду плотное множество. В настоящей работе описано открытое всюду плотное множество в подпространстве негрубых векторных полей в HP_n. Оно является аналитическим подмногообразием коразмерности один в HP_n и состоит из векторных полей X первой степени негрубости, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при переходе к негрубому векторному полю, достаточно близкому к X в HP_n. Описаны бифуркации векторных полей первой степени негрубости.

Abstract

The paper considers vector fields on the plane whose components are homogeneous polynomials of degree n. The set HP_n of such vector fields is identified with the $2n + 2$-dimensional space of coefficients of these polynomials. Phase portraits of vector fields are viewed on the projective plane. Structurally stable vector fields X, for which the topological structure of the phase portrait does not change when passing to a vector field close enough to X in HP_n, form an open everywhere dense set in HP_n. In this paper, we describe an open everywhere dense set in the subspace of structurally unstable vector fields in HP_n. It is an analytic submanifold of codimension one in HP_n and consists of vector fields X of the first degree of structural instability, for which the topological structure of the phase portrait does not change when passing to a structural unstable vector field close enough to X in HP_n. We describe bifurcations for vector fields of the first degree structurally instability.

Ключевые слова: однородное полиномиальное векторное поле на плоскости, грубость, бифуркация, бифуркационное многообразие, особая точка.
Keywords: homogeneous polynomial vector field on the plane, structural stability, first degree of structural instability, bifurcation manifold, singular point.

Введение

Симметрия дифференциальных уравнений традиционно использовалась для приведения их к специальным формам и получения первых интегралов [Овсянников, 1978; Арнольд, 1989; Ibragimov, 2006]. Однако есть ряд работ, посвященных изучению грубости и бифуркаций динамических систем с симметрией. В работах [Lamb, Capel, 1995; Lamb, Roberts, 1998; Лерман, Тураев, 2012] рассматривались бифуркации обратимых (реверсивных) систем. В [Takens, 1974; Арнольд, 1978; Golubitsky, Shaeffer, 1979] изучались локальные бифуркации плоских векторных полей с симметрией. В работах [Ройтенберг, 2018а] и [Ройтенберг, 2018б] даны необходимые и достаточные условия грубости относительно пространства векторных полей в единичном круге, инвариантных относительно группы вращений $SO(2)$ и, соответственно, ее конечной подгруппы, состоящей из вращений на углы кратные $2\pi/q$, $q=2,3,...$ В работе [Ройтенберг, 2019] изучались бифуркации векторных полей, инвариантных относительно группы вращений.

В статье [Ройтенберг, 2018в] фазовые портреты двумерных однородных векторных полей рассматривались на проективной плоскости. Были получены необходимые и достаточные условия грубости относительно пространства HF_n^r однородных C^r – векторных полей степени n и пространства HP_n однородных полиномиальных векторных полей степени n; доказано, что грубые векторные поля образуют в этих пространствах открытое и всюду плотное множество.

Настоящая работа посвящена бифуркациям коразмерности один однородных полиномиальных векторных полей на плоскости.

1. Однородные полиномиальные векторные поля и их траектории в круге Пуанкаре и на проективной плоскости

Приведем некоторые определения и обозначения из работы [Ройтенберг, 2018в].

Будем рассматривать на плоскости $\mathbf{R}^2$ *однородные полиномиальные векторные поля степени* $n\ge 2$

$$X(x,y)=P_1(x,y)\partial/\partial x+P_2(x,y)\partial/\partial y,$$

где $P_1(x,y)=\sum\limits_{i+j=n} a_{ij}x^iy^j$ и $P_2(x,y)=\sum\limits_{i+j=n} b_{ij}x^iy^j$ – однородные многочлены степени n.

Множество таких векторных полей обозначим HP_n. Поле $X\in\mathrm{HP}_n$ отождествим с арифметическим вектором $(a_{n,0},a_{n-1,1},...,a_{0,n},b_{n,0},b_{n-1,1},...,b_{0,n})$, а HP_n с пространством $\mathbf{R}^{2n+2}$ с евклидовой нормой. Фазовые портреты векторных полей из HP_n естественно рассматривать на круге Пуанкаре $\mathbf{K}$ и на проективной плоскости $\mathbf{RP}^2$.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ полусферу $\mathbf{K}:=\{(X,Y,Z)\in\mathbf{R}^3 \mid X^2+Y^2+Z^2=1,\ Z\ge 0\}$. Она естественно отождествляется с *кругом Пуанкаре* $\mathbf{K}=\{(X,Y)\in\mathbf{R}^2 \mid X^2+Y^2\le 1\}$. Отождествим $\mathbf{R}^2$ с $\mathbf{K}\setminus\partial\mathbf{K}$ посредством отображения $(X,Y,Z)\mapsto(x,y)=(X/Z,Y/Z)$.

Пусть $\mathbf{S}^1:=\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Диффеоморфизм

$$\zeta:[0,\infty)\times\mathbf{S}^1\to\mathbf{K}\setminus\{O\},\quad \zeta(r,\varphi):=(X,Y)=\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+r^2}},\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+r^2}}\right)$$

вводит в $\mathbf{K}\setminus\{O\}$ цилиндрические координаты $r,\ \varphi$. Координаты (x,y) точки из $\mathbf{R}^2\setminus\{O\}$ выражаются через координаты r,φ по формулам $x=\dfrac{\cos\varphi}{r}$, $y=\dfrac{\sin\varphi}{r}$. Поэтому $X=R_*(r,\varphi)\partial/\partial r+\Phi_*(r,\varphi)\partial/\partial\varphi$, где

$$R_*(r,\varphi)=-r^{2-n}[P_1(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi+P_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi],$$

$$\Phi_*(r,\varphi)=r^{1-n}[P_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi-P_1(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi].$$

Векторное поле $\bar{X} = -rR(\varphi)\partial/\partial r + \Phi(\varphi)\partial/\partial\varphi$, где

$$R(\varphi) = P_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + P_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi,$$
$$\Phi(\varphi) = P_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - P_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi$$

определено в $\mathbf{K}\setminus\{O\}$ и имеет в $\mathbf{R}^2\setminus\{O\} \equiv \mathbf{K}\setminus\partial\mathbf{K}\setminus\{O\}$ те же ориентированные траектории, что поле X. В точках $\partial\mathbf{K}$ $(r=0)$ векторное поле $\bar{X}$ касается $\partial\mathbf{K}$. Поэтому $\partial\mathbf{K}$ состоит из траекторий поля $\bar{X}$. Траектории векторных полей X в $\mathbf{R}^2$ и $\bar{X}\big|_{\partial\mathbf{K}}$ назовем *траекториями векторного поля* X *в* $\mathbf{K}$. На траекториях, отличных от особых точек, векторные поля X и $\bar{X}$ задают ориентацию, совпадающую на общих траекториях. Траектории, принадлежащие $\partial\mathbf{K}$, будем называть *бесконечно удаленными*. Векторное поле $\bar{X}$ можно считать определенным и для значений $r<0$.

Отождествив диаметрально противоположные точки $\partial\mathbf{K}$, получим из $\mathbf{K}$ проективную плоскость $\mathbf{RP}^2$. Поскольку

$$\forall\varphi \;\; R(\varphi+\pi) = (-1)^{n+1}R(\varphi),\; \Phi(\varphi+\pi) = (-1)^{n+1}\Phi(\varphi), \tag{1}$$

то траектории векторного поля X в $\mathbf{K}$ при этом перейдут в *траектории векторного поля* X *в* $\mathbf{RP}^2$. При нечетном n на траекториях в $\mathbf{RP}^2$ можно задать согласованную ориентацию, а при четном n это сделать нельзя.

2. Формулировки результатов

Будем говорить, что векторные поля X и Y из HP_n *топологически эквивалентны в* $\mathbf{K}$ (*в* $\mathbf{RP}^2$), если существует гомеоморфизм $h:\mathbf{K}\to\mathbf{K}$ ($h:\mathbf{RP}^2\to\mathbf{RP}^2$, $h(\mathbf{R}^2)=\mathbf{R}^2$), переводящий траектории поля X в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$) в траектории поля Y в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$) с сохранением ориентации на траекториях (на траекториях, лежащих в $\mathbf{R}^2$).

Векторное поле $X\in\mathrm{HP}_n$ назовем *грубым в* $\mathbf{K}$ (*в* $\mathbf{RP}^2$), если существует такая его окрестность $U(X)$ в HP_n, что X и любое векторное поле $X^*\in U(X)$ топологически эквивалентны в $\mathbf{K}$ (*в* $\mathbf{RP}^2$).

Векторное поле $X\in\mathrm{HP}_n$ назовем *векторным полем первой степени негрубости в* $\mathbf{K}$ (*в* $\mathbf{RP}^2$), если оно негрубое и существует такая его окрестность $U(X)$ в HP_n, что X и любое негрубое векторное поле $X^*\in U(X)$ топологически эквивалентны в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$).

Это определение аналогично определению для векторных полей на плоскости [Андронов и др. 1967], но мы не требуем близости сопрягающего гомеоморфизма к тождественному. В банаховом пространстве векторных полей класса C^r $(r\ge 3)$ на двумерном диске, векторные поля первой степени негрубости образуют вложенное C^{r-1}– подмногообразие коразмерности один и всюду плотны во множестве негрубых векторных полей [Sotomayor, 1974]. Мы покажем, что аналогичное описание имеется и для однородных полиномиальных векторных полей первой степени негрубости.

Согласно [Ройтенберг, 2018в], множество $\Sigma^0 = \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ грубых векторных полей из HP_n выделяется условием: или имеются бесконечно удаленные особые точки и все они гиперболические, или (что возможно только при нечетном n) $\partial\mathbf{K}$ – гиперболическая замкнутая траектория. Это множество открыто и всюду плотно в HP_n.

Обозначим Σ_1^1 множество векторных полей $X \in \mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0$, для которых существует двукратный нуль $\varphi_0 \in [0,\pi)$ функции Φ, такой, что $R(\varphi_0) \neq 0$, а для всех остальных нулей $\varphi_* \in [0,\pi)$ $\Phi'(\varphi_*) \neq 0$ и $R(\varphi_*) \neq 0$. Это означает, что для векторного поля $\bar{X}$ точки $(0,\varphi_0)$ и $(0,\varphi_0+\pi)$ – простые седло-узлы [Шильников и др., 2009, с. 89], центральные многообразия которых принадлежат $\partial\mathbf{K}$, а остальные особые точки гиперболические.

Обозначим Σ_2^1 множество векторных полей $X \in \mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0$, для которых все нули функции Φ простые, существует нуль $\varphi_0 \in [0,\pi)$, такой, что $R(\varphi_0) = 0$, а для всех остальных нулей $\varphi_* \in [0,\pi)$ $R(\varphi_*) \neq 0$. Это означает, что для векторного поля $\bar{X}$ все точки (r_0,φ_0) и $(r_0,\varphi_0+\pi)$, $0 \le r_0 < \infty$, являются особыми, а остальные особые точки, отличные от точки O, принадлежат $\partial\mathbf{K}$ и являются гиперболическими. Ниже, в параграфе 5, будет показано, что для любой особой точки $S_0 = (r_0,\varphi_0)$ ($S_0 = (r_0,\varphi_0+\pi)$), существует одномерное аналитическое локальное инвариантное многообразие $W(r_0)$ поля $\bar{X}$, содержащее S_0 и такое, что траектории, начинающиеся в точках $W(r_0)$, ω– предельны к S_0, если $\Phi'(\varphi_0) < 0$ ($(-1)^{n-1}\Phi'(\varphi_0) < 0$) и α-предельны к S_0, если $\Phi'(\varphi_0) > 0$ ($(-1)^{n-1}\Phi'(\varphi_0) > 0$).

Обозначим также $\Sigma_3^1 = \Sigma_3^1\mathrm{HP}_n$ множество векторных полей из $\mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0$ при нечетном n, для которых $\partial\mathbf{K}$ – негиперболическая замкнутая траектория, то есть $\Phi(\varphi) \neq 0$ при любом $\varphi \in [0,2\pi]$, а $\chi = -\int\limits_0^{2\pi} R(\varphi)/\Phi(\varphi)\,d\varphi = 0$. Все траектории поля $X \in \Sigma_3^1$ в $\mathbf{K}$, кроме начала координат, замкнутые.

Пусть $\Sigma^1 := \Sigma^1\mathrm{HP}_n := \Sigma_1^1 \cup \Sigma_2^1 \cup \Sigma_3^1$ при нечетном n и $\Sigma^1 := \Sigma^1\mathrm{HP}_n := \Sigma_1^1 \cup \Sigma_2^1$ при четном n.

Теорема. Множество $\Sigma^1\mathrm{HP}_n$ открыто и всюду плотно в $\mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ и является вложенным аналитическим подмногообразием коразмерности один в HP_n. Векторное поле $X \in \mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0\mathrm{HP}_n$ имеет первую степень негрубости в $\mathbf{K}$ (в $\mathbf{RP}^2$) тогда и только тогда, когда оно принадлежит $\Sigma^1\mathrm{HP}_n$. При переходе через Σ_1^1 две пары диаметрально противоположных на $\partial\mathbf{K}$ особых точек типов седло и узел сливаются в седло-узлы и исчезают. При переходе через Σ_2^1 две диаметрально противоположные на $\partial\mathbf{K}$ особые точки превращаются из седла в узел. При переходе через Σ_3^1 устойчивость бесконечно удаленной замкнутой траектории $\partial\mathbf{K}$ меняется на противоположную.

Доказательство теоремы приведено ниже в параграфах 3–5.

Замечание. Из доказательства и из [Андронов и др. 1967] видно, что гомеоморфизм $h:\mathbf{K} \to \mathbf{K}$, переводящий траектории поля $X \in \Sigma^1$ в траектории поля $X^* \in \Sigma^1 \cap U(X)$, можно сделать сколь угодно близким к тождественному, выбрав достаточно малую окрестность $U(X)$ поля X.

3. Плотность $\Sigma^1\mathrm{HP}_n$ в $\mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0\mathrm{HP}_n$

Открытость Σ^1 в $\mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0$ очевидна. Докажем плотность Σ^1 в $\mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0$. Пусть $U(X)$ – произвольная окрестность векторного поля $X = P_1\partial/\partial x + P_2\partial/\partial y \in \mathrm{HP}_n \setminus \Sigma^0 \setminus \Sigma^1$. Мы должны доказать, что существует векторное поле $X^* \in \Sigma^1 \cap U(X_0)$. Для поля X имеет место один из следующих вариантов:

(А) Существует нуль $\varphi_0 \in [0,\pi)$ функции Φ кратности ≥ 3.

(Б) Все нули функции Φ имеют кратность ≤ 2; существуют два нуля $\varphi_0, \varphi_1 \in [0,\pi)$ кратности 2.

(В) Функция Φ имеет нуль $\varphi_1 \in [0,\pi)$ кратности 2, а все остальные нули Φ на $[0,\pi)$ простые, при этом Φ и R имеют общий нуль.

(Г) Функция Φ имеет только простые нули, существуют два нуля $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,\pi)$, для которых $R(\varphi_1) = R(\varphi_2) = 0$.

Рассмотрим случаи (А) и (Б). Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_0 = 0$. Действительно, поворот плоскости на угол $-\varphi_0$ индуцирует аналитический диффеоморфизм пространства HP_n, переводящий векторное поле X в векторное поле X^0, для которого $\bar{X}^0 = -rR^0\partial/\partial r + \Phi^0\partial/\partial\varphi$, где $R^0(\varphi) = R(\varphi - \varphi_0)$, $\Phi^0(\varphi) = \Phi(\varphi - \varphi_0)$, и мы можем вместо поля X рассматривать поле X^0. Определим векторное поле

$$X_{\alpha,\beta,\gamma,\mu} = P_1^{\beta,\gamma}\,\partial/\partial x + P_2^{\alpha,\beta,\gamma,\mu}\,\partial/\partial y \in \mathrm{HP}_n, \quad \text{положив} \quad P_1^{\beta,\gamma}(x,y) = P_1(x,y) + \beta x^n + \gamma x y^{n-1},$$

$$P_2^{\alpha,\beta,\gamma,\mu}(x,y) = P_2(x,y) + (\alpha x + \mu y)y^2(x^2+y^2)^{m-1} + \beta x^{n-1}y + \gamma y^n, \text{ если } n = 2m+1,$$

$$\text{и} \quad P_2^{\alpha,\beta,\gamma,\mu}(x,y) = P_2(x,y) + \alpha y^2(x^2+y^2)^{m-1} + \beta x^{n-1}y + \gamma y^n, \text{ если } n = 2m.$$

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $X_{\alpha,\beta,\gamma,\mu} \in U(X_0)$, если $|\alpha| < \delta$, $|\beta| < \delta$, $|\gamma| < \delta$, $|\mu| < \delta$. Соответствующее $X_{\alpha,\beta,\gamma,\mu}$ векторное поле $\bar{X}_{\alpha,\beta,\gamma,\mu} = -rR_{\alpha,\beta,\gamma,\mu}(\varphi)\partial/\partial r + \Phi_{\alpha,\mu}(\varphi)\partial/\partial\varphi$, где

$$R_{\alpha,\beta,\gamma,\mu}(\varphi) = R(\varphi) + \alpha\sin^3\varphi\cos\varphi + \mu\sin^4\varphi + \beta\cos^{n-1}\varphi + \gamma\sin^{n-1}\varphi,$$

$$\Phi_{\alpha,\mu}(\varphi) = \Phi(\varphi) + \alpha\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \mu\sin^3\varphi\cos\varphi, \text{ если } n = 2m+1,$$

$$R_{\alpha,\beta,\gamma,\mu}(\varphi) = R(\varphi) + \alpha\sin^3\varphi + \beta\cos^{n-1}\varphi + \gamma\sin^{n-1}\varphi,$$

$$\Phi_{\alpha,\mu}(\varphi) = \Phi(\varphi) + \alpha\sin^2\varphi\cos\varphi, \text{ если } n = 2m.$$

Поэтому δ можно считать выбранным так, что и в случае (А), и в случае (Б)

$$\forall \alpha,\beta,\gamma,\mu \in (0,\delta) \quad \Phi_{\alpha,\mu}(0) = \Phi'_{\alpha,\mu}(0) = 0, \ \Phi''_{\alpha,\mu}(0) = \Phi''(0) + 2\alpha \neq 0, \ R_{\alpha,\beta,\gamma,\mu}(0) = \beta \neq 0.$$

Так как $\Phi'_{\alpha,\mu}(\pi/2) = \Phi'(\pi/2) - \mu$ при $n = 2m+1$, $\Phi'_{\alpha,\mu}(\pi/2) = \Phi'(\pi/2) - \alpha$ при $n = 2m$, то можно считать, что при некоторых $\alpha_0, \mu \in (0,\delta)$ $\Phi'_{\alpha_0,\mu}(\pi/2) \neq 0$. Фиксируем такие α_0 и μ. Так как $\Phi_{\alpha_0,\mu}$ – ненулевая аналитическая функция, то она имеет конечное число нулей конечной кратности. Выберем промежутки $[-\rho,\rho]$, $0 < \rho < \pi/4$, и $(\alpha_0-\sigma,\alpha_0+\sigma)\subset(0,\delta)$ так, чтобы $\forall\alpha\in(\alpha_0-\sigma,\alpha_0+\sigma)$ функция $\Phi_{\alpha,\mu}$ имела на $[-\rho,\rho]$ единственный нуль $\varphi=0$. Так как $\Phi'_{\alpha_0,\mu}(\pi/2)\neq 0$, то ρ и σ можно считать выбранными так, что $\forall\alpha\in(\alpha_0-\sigma,\alpha_0+\sigma)$ $\forall\varphi\in[\pi/2-\rho,\pi/2+\rho]$ $\Phi'_{\alpha,\mu}(\varphi)\neq 0$. Поэтому $\Phi_{\alpha,\mu}$ либо не имеет нулей на $[\pi/2-\rho,\pi/2+\rho]$, либо имеет единственный и простой нуль. Так как в случае $n=2m+1$ $\forall\alpha\in(\alpha_0,\alpha_0+\sigma)$ $\Phi_{\alpha,\mu}(\varphi)>\Phi_{\alpha_0,\mu}(\varphi)$ при $\varphi\in[\rho,\pi/2-\rho]\cup[\pi/2+\rho,\pi-\rho]$, в случае $n=2m$ $\forall\alpha\in(\alpha_0,\alpha_0+\sigma)$ $\Phi_{\alpha,\mu}(\varphi)>\Phi_{\alpha_0,\mu}(\varphi)$ ($\Phi_{\alpha,\mu}(\varphi)<\Phi_{\alpha_0,\mu}(\varphi)$) при $\varphi\in[\rho,\pi/2-\rho]$ ($\varphi\in[\pi/2+\rho,\pi-\rho]$), а $\Phi_{\alpha_0,\mu}$ имеет конечное число нулей конечной кратности, то существует такое $\alpha_1\in(\alpha_0,\alpha_0+\sigma)$, что $\Phi_{\alpha_1,\mu}$ имеет на $[\rho,\pi/2-\rho]\cup[\pi/2+\rho,\pi-\rho]$ только простые нули. Таким образом, все нули φ_i, $i=1,..,N$, функции $\Phi_{\alpha_1,\mu}$ на $(0,\pi)$ простые. Мы можем выбрать сколь угодно малые $\beta,\gamma\in(0,\delta)$ так, чтобы числа φ_i, $i=1,..,N$ не совпадали с корнями уравнения $\operatorname{ctg}^{n-1}\varphi=-\gamma/\beta$ на $(0,\pi)$. Тогда при достаточно малых $\beta,\gamma\in(0,\delta)$ $R_{\alpha_1,\beta,\gamma,\mu}(\varphi_i)\neq 0$, $i=1,..,N$. Тем самым $X^*=X_{\alpha_1,\beta,\gamma,\mu}\in\Sigma_1^1\cap U(X)$.

Рассмотрим случаи (В) и (Г). Пусть $X_{\alpha,\beta,\gamma,\mu}$ – векторное поле, определенное выше. Выберем $\delta>0$ так, чтобы $X_{0,\beta,\gamma,0}\in U(X)$, если $|\beta|<\delta$, $|\gamma|<\delta$.

В случае (В) функция $\Phi_{0,0}(\varphi)=\Phi(\varphi)$ имеет на $[0,\pi)$ двукратный нуль φ_1 и только простые нули φ_i, $i=2,..,N$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_i\neq 0$, $i=1,..,N$. Как и выше получаем, что $\beta,\gamma\in(0,\delta)$ можно выбрать так, чтобы в случае (В) числа φ_i, $i=1,..,N$ не совпадали с корнями уравнения $\operatorname{ctg}^{n-1}\varphi=-\gamma/\beta$ на $(0,\pi)$, и потому при β,γ, достаточно близких к нулю, $R_{0,\beta,\gamma,0}(\varphi_i)\neq 0$, $i=1,..,N$. Тем самым $X^*=X_{0,\beta,\gamma,0}\in\Sigma_1^1\cap U(X)$.

В случае (Г) функция $\Phi_{0,0}(\varphi)=\Phi(\varphi)$ имеет на $[0,\pi)$ только простые нули φ_i, $i=1,..,N$, причем можно считать $\varphi_1=0$, $R(\varphi_1)=0$. Выбрав $\gamma\in(0,\delta)$ достаточно малым, будем иметь $R_{0,0,\gamma,0}(0)=0$, а $R_{0,0,\gamma,0}(\varphi_i)=R(\varphi_i)+\gamma\sin^{n-1}\varphi_i\neq 0$, $i=2,..,N$. Тем самым $X^*=X_{0,0,\gamma,0}\in\Sigma_2^1\cap U(X)$.

Итак, плотность $\Sigma^1\mathrm{HP}_n$ в $\mathrm{HP}_n\setminus\Sigma^0\mathrm{HP}_n$ доказана.

4. Необходимость условий первой степени негрубости

Пусть векторное поле $X=P_1\partial/\partial x+P_2\partial/\partial y\in\mathrm{HP}_n$ – первой степени негрубости в $\mathbf{K}$, $U(X)$ – окрестность поля X, фигурирующая в определении грубости. Тогда любые два негрубых векторных поля из $U(X)$ топологически эквивалентны. Так как Σ^1 всюду плотно в HP_n, то либо а) X топологически эквивалентно векторному полю из Σ_1^1, и потому $\Phi(\varphi)$ на $[0,\pi)$ имеет один нуль φ_0 четной кратности, а остальные нули φ_i, $i=1,..,N$, имеют нечетную кратность, либо б) X топологически эквивалентно векторному полю из Σ_2^1, и потому все нули $\varphi_i\in[0,\pi)$, $i=1,..,N$, имеют нечетную кратность, а $R(\varphi_1)=0$, $R(\varphi_i)\neq 0$ для $i=2,..,N$, либо в) n нечетно, $\Phi(\varphi)$ не имеет нулей, а $\chi=-\int_0^{2\pi} R(\varphi)/\Phi(\varphi)\,d\varphi=0$.

В случае в) $X\in\Sigma^1$. Докажем, что $X\in\Sigma^1$ и в случаях а) и б). Предположим, что это не так: $X\in \mathrm{HP}_n\setminus\Sigma^1\setminus\Sigma^0$ и придем к противоречию.

Рассмотрим случай а). Тогда либо а$_1$) φ_0 имеет кратность $2m\geq 4$, либо а$_2$) φ_0 – двукратный нуль, а один из нулей φ_i, $i=1,..,N$, для определенности φ_1, имеет кратность $2m-1\geq 3$.

В случае а$_1$) без ограничения общности можно считать $\varphi_0=0$. Выберем такое $\varepsilon>0$, что $\operatorname{sgn}\Phi(\varphi)=\operatorname{sgn}\Phi^{(2m)}(0)$, если $0<|\varphi|\leq\varepsilon$. Рассмотрим векторное поле $X_\lambda=X-\lambda x^{n-1}y\partial/\partial x$. Ему соответствует поле $\bar{X}_\lambda=-rR_\lambda(\varphi)\partial/\partial r+\Phi_\lambda(\varphi)\partial/\partial\varphi$, где $\Phi_\lambda(\varphi)=\Phi(\varphi)+\lambda\sin^2\varphi\cos^{n-1}\varphi$. Так как $(\Phi_\lambda)'(0)=\Phi'(0)=0$, то $X_\lambda\in\mathrm{HP}_n\setminus\Sigma^0$. Выберем $\delta>0$ так, что $X_\lambda\in U(X)$, если $|\lambda|<\delta$. Так как $\Phi''(0)=0$, то $(\Phi_\lambda)''(0)=\Phi''(0)+2\lambda=2\lambda$. Выбрав достаточно близкое к нулю λ так, чтобы $\operatorname{sgn}(\Phi_\lambda)''(0)=-\operatorname{sgn}\Phi^{(2m)}(0)$, будем иметь для $\Phi_\lambda(\varphi)$ на интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$ не менее трех нулей, при этом число нулей на $[\varepsilon,\,\pi-\varepsilon]$ не уменьшится. Таким образом, $X_\lambda\in U(X)\setminus\Sigma^0$ имеет больше особых точек, чем X, что противоречит их топологической эквивалентности.

В случае а$_2$) без ограничения общности можно считать $\varphi_1=0$. Тогда $\varphi_0\in(0,\pi)$. Выберем такое $\varepsilon>0$, что $\operatorname{sgn}\Phi(\varphi)=\operatorname{sgn}\Phi''(0)$, если $0<|\varphi|\leq\varepsilon$. Рассмотрим векторное поле $X_{\lambda,\mu}=X-\lambda(\mu x^{n-2}y^2+y^n)\partial/\partial x$, $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$. При λ и μ достаточно близких к нулю $X_{\lambda,\mu}\in U(X)$. Для функции $\Phi_{\lambda,\mu}(\varphi)=\Phi(\varphi)+\lambda\sin^3\varphi(\mu\cos^{n-2}\varphi+\sin^{n-2}\varphi)$ $\varphi_1=0$ – трехкратный нуль и потому $X_{\lambda,\mu}\in U(X)\setminus\Sigma^0$. Выберем $\mu>0$ столь малым, что $\mu\cos^{n-2}\varphi_0+\sin^{n-2}\varphi_0>0$. Так как $\Phi_{\lambda,\mu}(\varphi_0)=\lambda\sin^3\varphi_0(\mu\cos^{n-2}\varphi_0+\sin^{n-2}\varphi_0)$, то $\operatorname{sgn}\Phi_{\lambda,\mu}(\varphi_0)=\operatorname{sgn}\lambda$. Пусть $\operatorname{sgn}\lambda=-\operatorname{sgn}\Phi''(0)$. Тогда при λ достаточно близком к нулю у функции $\Phi_{\lambda,\mu}(\varphi)$ в $(\varphi_0-\varepsilon,\varphi_0+\varepsilon)$ будет два нуля, а число нулей в $[\varphi_0+\varepsilon,\,\varphi_0-\varepsilon+\pi]$ не уменьшится. Тем самым $X_{\lambda,\mu}\in U(X)\setminus\Sigma^0$ имеет больше особых точек, чем X, в противоречие с их топологической эквивалентностью.

Рассмотрим случай б). Тогда один из нулей φ_i, $i=1,..,N$ имеет кратность $2m-1\geq 3$. Мы можем считать, что все $\varphi_i\neq 0$. Рассмотрим поле $X_{\mu,\nu}=P_1^{\mu,\nu}\partial/\partial x+P_2^{\mu,\nu}\partial/\partial y\in\mathrm{HP}_n$, где $P_1^{\mu,\nu}(x,y)=P_1(x,y)+\mu(\nu x^n+xy^{n-1})$, $P_2^{\mu,\nu}(x,y)=P_2(x,y)+\mu(\nu x^{n-1}y+y^n)$. Соответствующие функции $\Phi_{\mu,\nu}(\varphi)=\Phi(\varphi)$, $R_{\mu,\nu}(\varphi)=R(\varphi)+\mu(\nu\cos^{n-1}\varphi+\sin^{n-1}\varphi)$. Выберем $\nu>0$ так, чтобы $\nu\cos^{n-1}\varphi_i+\sin^{n-1}\varphi_i>0$ для всех $i=1,..,N$. Тогда при достаточно малом $\mu>0$ $R_{\mu,\nu}(\varphi_i)\neq 0$ для всех $i=1,..,N$, а $X_{\mu,\nu}\in U(X)$. Так как $\Phi_{\mu,\nu}(\varphi)=\Phi(\varphi)$ имеет кратный нуль, то $X_{\mu,\nu}\in U(X)\setminus\Sigma^0$. Поскольку векторное поле

$X_{\mu,\nu}$, в отличие от X, имеет конечное число особых точек, то оно не может быть топологически эквивалентно X. Снова получаем противоречие.

Таким образом, предположение, что векторное поле $X \in \mathrm{HP}_n$ первой степени негрубости не принадлежит Σ^1 приводит к противоречию. Следовательно, $X \in \Sigma^1$.

5. Достаточность условий первой степени негрубости. Σ_k^1 – подмногообразия

Изменим обозначения, записав поле $X \in \mathrm{HP}_n$ в виде

$$P_1(x,y,X)\partial/\partial x + P_2(x,y,X)\partial/\partial y,$$

где $P_i(x,y,X)$, $i=1,2$, являются многочленами от $(x,y,X)=(x,y,a_{n,0},...,a_{0,n},b_{n,0},...,b_{0,n})$. Соответственно, вместо $R(\varphi)$ и $\Phi(\varphi)$ будем иметь аналитические функции $R(\varphi,X)$ и $\Phi(\varphi,X)$ переменных (φ,X).

Пусть $X_0 \in \Sigma_1^1$, $\varphi_0 \in [0,\pi)$ – нуль функции $\Phi(\cdot,X_0)$, фигурирующий в определении Σ_1^1; остальные нули этой функции из $[0,\pi)$ – простые. Так как $\Phi'_\varphi(\varphi_0,X_0)=0$, $\Phi''_{\varphi\varphi}(\varphi_0,X_0)\neq 0$, то по теореме о неявной функции [Нарасимхан, 1971] существуют окрестность $V(X_0)$ поля X_0 и число $\delta \in (0,\pi/2)$, такие, что $\forall X \in V(X_0)$ уравнение $\Phi'_\varphi(\varphi,X)=0$ имеет на промежутке $(\varphi_0-\delta,\varphi_0+\delta)$ единственное решение $\varphi=\bar{\varphi}(X)$, где $\bar{\varphi}(\cdot)$ – аналитическая функция, $\bar{\varphi}(X_0)=\varphi_0$. Выбрав окрестность $V(X_0)$ достаточно малой, мы можем считать, что

$$\left.\begin{array}{c}\forall\varphi \in (\varphi_0-\delta,\varphi_0+\delta)\ \forall X \in V(X_0)\ \Phi''_{\varphi\varphi}(\varphi,X)\neq 0,\ R(\varphi,X)\neq 0,\ \Phi(\cdot,X)\\ \textit{имеет на } [\varphi_0+\delta,\varphi_0-\delta+\pi] \textit{ только простые нули, отличные от нулей } R(\cdot,X).\end{array}\right\} \quad (2)$$

Функция $f: V(X_0)\to \mathbf{R}$, определенная равенством $f(X):=\Phi(\bar{\varphi}(X),X)$, является аналитической. Покажем, что $f'(X_0)\neq 0$.

При $n=2m+1$ возьмем $H=-y(x^2+y^2)^m\,\partial/\partial x + x(x^2+y^2)^m\,\partial/\partial y \in \mathrm{HP}_n$. Тогда

$$\Phi(\varphi,X_0+\tau H)=\Phi(\varphi,X_0)+\tau,\ \bar{\varphi}(X_0+\tau H)\equiv\varphi_0,\ f(X_0+\tau H)=\tau.$$

При $n=2m$ возьмем $H=-(x^2+y^2)^m\sin\varphi_0\,\partial/\partial x+(x^2+y^2)^m\cos\varphi_0\,\partial/\partial y \in \mathrm{HP}_n$. Тогда

$$\Phi(\varphi,X_0+\tau H)=\Phi(\varphi,X_0)+\tau\cos(\varphi-\varphi_0),\ \bar{\varphi}(X_0+\tau H)\equiv\varphi_0,\quad f(X_0+\tau H)=\tau.$$

В обоих случаях $f'(X_0)H=\frac{d}{d\tau}\big|_{\tau=0} f(X_0+\tau H)=1\neq 0$ и потому $f'(X_0)\neq 0$.

Так как $f(X_0)=0$, $f'(X_0)\neq 0$, а $\dim \mathrm{HP}_n = 2n+2$, то вследствие теоремы о неявной функции существуют число $c>0$, окрестность $U(X_0)\subset V(X_0)$ поля X_0 и аналитический диффеоморфизм $g:(-c,c)\times\mathbf{R}^{2n+1}\to U(X_0)$, такие, что $g(0,0)=X_0$, $f(g(\tau,\lambda))=\tau$ [Палис, Мелу, 1986]. Для $X=g(0,\lambda)$ имеем $f(X):=\Phi(\bar{\varphi}(X),X)=0$. Учитывая (2) и (1), получаем, что $g(0\times\mathbf{R}^{2n+1})=\Sigma_1^1\cap U(X_0)$, все векторные поля из этого множества принадлежат Σ_1^1 и топологически эквивалентны полю X_0 и в $\mathbf{K}$ и в $\mathbf{RP}^2$. Тем самым X_0 имеет первую степень негрубости, а Σ_1^1 – вложенное аналитическое подмногообразие HP_n. При $\Phi''_{\varphi\varphi}(\varphi_0,X_0)\tau>0$ ($\Phi''_{\varphi\varphi}(\varphi_0,X_0)\tau<0$) векторное поле

$X = g(\tau,\lambda)$ принадлежит Σ^0 и не имеет бесконечно удаленных особых точек с координатами $\varphi \in [\varphi_0-\delta, \varphi_0+\delta]$ и $\varphi \in [\varphi_0-\delta+\pi, \varphi_0+\delta+\pi]$ (имеет по две бесконечно удаленные особые точки с координатами $\varphi \in [\varphi_0-\delta, \varphi_0+\delta]$ и $\varphi \in [\varphi_0-\delta+\pi, \varphi_0+\delta+\pi]$).

Пусть $X_0 \in \Sigma_2^1$, $\varphi_0 \in [0,\pi)$ – нуль функций $\Phi(\cdot, X_0)$ и $R(\cdot, X_0)$, фигурирующий в определении Σ_2^1, а φ_i, $i=1,..,N$, – остальные нули $\Phi(\cdot, X_0)$ на $[0,\pi)$. Так как $\Phi(\varphi_j, X_0)=0$, $\Phi'_\varphi(\varphi_j, X_0)\neq 0$, $j=0,1,..,N$, $R(\varphi_i, X_0)\neq 0$, $i=1,..,N$, то существуют попарно не пересекающиеся интервалы $(\varphi_j-\delta, \varphi_j+\delta)$, $j=0,1,..,N$, окрестность $V(X_0)$ поля X_0 и аналитические функции $\bar\varphi_j : V(X_0)\to(\varphi_j-\delta, \varphi_j+\delta)$, такие, что, $\forall X \in V(X_0)$ $\bar\varphi_j(X)$, $j=0,1,..,N$, – простые нули $\Phi(\cdot, X)$, $\bar\varphi_j(X_0)=\varphi_j$; других нулей $\Phi(\cdot, X)$ на промежутке $[\bar\varphi_0(X), \bar\varphi_0(X)+\pi)$ не имеет; $\operatorname{sgn} R(\varphi, X)=\operatorname{sgn} R(\varphi_i, X_0)\neq 0$, если $\varphi\in(\varphi_i-\delta, \varphi_i+\delta)$, $i=1,..,N$.

Функция $f: V(X_0)\to\mathbf{R}$, определенная равенством $f(X):=R(\bar\varphi_0(X), X)$, является аналитической. Покажем, что $f'(X_0)\neq 0$. Возьмем

$$H=(x^n+\gamma x y^{n-1})\partial/\partial x+(x^{n-1}y+\gamma y^n)\partial/\partial y \in \mathrm{HP}_n,$$

где $\gamma \neq -\mathrm{ctg}^{n-1}\varphi_0$ при $\varphi_0\neq 0$. Тогда

$$\Phi(\varphi, X_0+\tau H)=\Phi(\varphi, X_0),\ \bar\varphi_0(X_0+\tau H)\equiv\varphi_0,$$

$$f(X_0+\tau H):=R(\varphi_0, X_0+\tau H)=\tau(\cos^{n-1}\varphi_0+\gamma\sin^{n-1}\varphi_0),$$

$$f'(X_0)H=\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} f(X_0+\tau H)=\cos^{n-1}\varphi_0+\gamma\sin^{n-1}\varphi_0\neq 0,\ f'(X_0)\neq 0.$$

Ясно, что $\{X: f(X)=0\}=V(X_0)\setminus\Sigma^0=\Sigma_2^1\cap V(X_0)$. Так как $f'(X_0)\neq 0$, то отсюда следует, что Σ_2^1 – вложенное аналитическое подмногообразие HP_n.

Все точки лучей $\varphi=\bar\varphi_0(X)$ и $\varphi=\bar\varphi_0(X)+\pi$ – особые. Так как $\Phi(\bar\varphi_0(X), X)=0$, $\Phi'_\varphi(\bar\varphi_0(X), X)\neq 0$, $R(\bar\varphi_0(X), X)=0$, то $\delta_1>0$ можно выбрать так, что при $0<|\varphi-\bar\varphi_0(X)|<\delta_1$ $R(\varphi, X)/\Phi(\varphi, X)=a(\varphi)$, где $a(\varphi)$ – аналитическая функция на $(\bar\varphi_0(X)-\delta_1, \bar\varphi_0(X)+\delta_1)$. Уравнение $r=r_0\exp\int_0^\varphi a(\theta)\,d\theta$, $\varphi\in(\bar\varphi_0(X)-\delta_1, \bar\varphi_0(X)+\delta_1)$, задает аналитическое локальное инвариантное многообразие $W(r_0)$ поля X, содержащее особую точку с координатами $r=r_0$, $\varphi=\bar\varphi_0(X)$, к которой ω-предельны (α-предельны) траектории, начинающиеся в точках $W(r_0)$, если $\Phi'_\varphi(\varphi_0, X_0)<0$ ($\Phi'_\varphi(\varphi_0, X_0)>0$). Ввиду (1) существует и аналитическое локальное инвариантное многообразие поля X, содержащее особую точку с координатами $r=r_0$, $\varphi=\bar\varphi_0(X)+\pi$, к которой ω-предельны (α-предельны) траектории, начинающиеся в его точках, если $(-1)^{n-1}\Phi'_\varphi(\varphi_0, X_0)<0$

($(-1)^{n-1}\Phi'_\varphi(\varphi_0, X_0)>0$). Теперь ясно, что все негрубые векторные поля $X\in V(X_0)$ топологически эквивалентны X_0. Тем самым $X_0\in\Sigma_2^1$ имеет первую степень негрубости.

Бесконечно удаленные особые точки с координатами $\varphi = \bar{\varphi}_0(X)$ и $\varphi = \bar{\varphi}_0(X) + \pi$ при $f(X)\Phi'_\varphi(\varphi_0, X_0) < 0$ – узлы, а при $f(X)\Phi'_\varphi(\varphi_0, X_0) > 0$ – седла.

Пусть $X_0 \in \Sigma_3^1$. Выберем окрестность $V(X_0)$ поля X_0 так, чтобы $\forall X \in V(X_0)$ $\Phi(\varphi, X) \neq 0$. Функцию $f : V(X_0) \to \mathbf{R}$ зададим равенством $f(X) := -\int\limits_0^{2\pi} \frac{R(\varphi, X)}{\Phi(\varphi, X)} d\varphi$. Пусть $H \in \mathrm{HP}_n$ определено равенством $H(x, y) := -P_2(x, y, X_0)\partial/\partial x + P_1(x, y, X_0)\partial/\partial y$. Как показано в [Ройтенберг, 2018в] $f(X_0 + \tau H) = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{R(\varphi, X_0) - \tau\Phi(\varphi, X_0)}{\Phi(\varphi, X_0) + \tau R(\varphi, X_0)} d\varphi$, и потому

$$f'(X_0)H = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} f(X_0 + \tau H) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2(\varphi, X_0) + \Phi^2(\varphi, X_0)}{\Phi^2(\varphi, X_0)} d\varphi \neq 0 \quad \text{и} \quad f'(X_0) \neq 0.$$

Следовательно, $\Sigma_3^1 \cap V(X_0) = \{X : f(X) = 0\}$, и Σ_3^1 является вложенным аналитическим подмногообразием HP_n. При $f(X) < 0$ ($f(X) > 0$) $\partial\mathbf{K}$ является устойчивой (неустойчивой) траекторий поля X в $\mathbf{K}$.

Поскольку для любого поля $X_0 \in \Sigma_k^1$ $(k = 1, 2, 3)$ $\Sigma^1 \cap V(X_0) = \Sigma_k^1 \cap V(X_0)$, а Σ_k^1 является вложенным аналитическим подмногообразием HP_n, то и Σ^1 является вложенным аналитическим подмногообразием.

Список литературы
References

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. 1967. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука. 487 с.

Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. 1967. Teorija bifurkacij dinamicheskih sistem na ploskosti [The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane]. Moscow. Nauka Publ. 1967. 488 p.

2. Арнольд В.И. 1978. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 304 с.

Arnold V.I. 1978. Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]. Moscow. Nauka Publ. 304 p.

3. Арнольд В.И. 1989. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1989. 472 с.

Arnold V.I. 1989. Matematicheskie metody klassicheskoj mehaniki [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow. Nauka Publ. 472 p.

4. Лерман Л.М., Тураев Д.В. 2012. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах. Нелинейная динамика. Т. 8, № 2. С. 323–343.

Lerman L.M., Turaev D.V. 2012. On symmetry breaking bifurcations in reversible systems. Nonlinear Dynamics. V. 8. No. 2. P. 323–343 (In Russian).

5. Нарасимхан Р. 1971. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. Пер. с англ. М.: Мир. 232 с.

Narasimhan R. 1968. Analysis on real and complex manifolds. Paris. Masson & Cie.

6. Овсянников Л.В. 1978. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 400 с.

Ovsjannikov L.V. 1978. Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij [Group analysis of differential equations]. Moscow. Nauka Publ. 400 p (In Russian).

7. Палис Ж., Мелу В. 1986. Геометрическая теория динамических систем. Введение. Пер. с англ. М.: Мир. 301 с.

Palis J., Melo W. 1982. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. Springer-Verlag. 198 p.

8. Ройтенберг В.Ш. 2018. Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно конечной группы вращений. Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. «Естественно-математические и технические науки» № 3 (226). С. 13–19.

Roitenberg V.Sh. 2018. Structural stability of vector fields on the plane those are invariant under a finite rotation group. Bulletin of the Adyghe State University. Series «Natural-Mathematical and Technical Sciences» No. 3 (226). P. 13–19 (In Russian).

9. Ройтенберг В.Ш. 2018. Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно группы вращений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. Т. 50, № 4. С. 398–404.

Roitenberg V.Sh. 2018. Structural stability of planar vector fields those are invariant under the rotation group. Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. Mathematics. Physics. V. 50, No. 4. P. 398–404 (In Russian).

10. Ройтенберг В.Ш. 2018. О типичных однородных векторных полях на плоскости. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. № 2 (46). С. 15–26.

Roitenberg V.Sh. 2018. On generic homogeneous vector fields on the plane. University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. No. 2 (46). P. 15–26 (In Russian).

11. Ройтенберг В.Ш. 2019. О бифуркациях векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращений. В кн.: Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль. Издат. дом ЯГТУ. С. 46–55.

Roitenberg V.Sh. 2019. On bifurcations of vector fields on the plane those are invariant under rotations. In: Matematika i estestvennye nauki. Teorija i praktika: Mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp. 14 [Mathematics and natural sciences. Theory and practice: coll. of scientific works. Iss. 14]. Yaroslavl. YaSTU Publishing House. P. 46–55 (In Russian).

12. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. 2009. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва–Ижевск: ИКИ. 548 с.

Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L. 2001. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 2. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific.

13. Golubitsky M, Shaeffer D. 1979. Inperfect bifurcations in the presence of symmetry. Comm. Math. Phys. V. 67. P. 205–232.

14. Ibragimov N.H. 2006. A practical course of differential equations and mathematical modeling. Carlscrona (Sweden): ALGA. 370 p.

15. Lamb J. S. W., Capel H. W. 1995. Local bifurcations on the plane with reversing point group symmetry. Chaos. Solitons. Fractals. V. 5. No. 2. P. 271–293.

16. Lamb J. S.W., Roberts J.A. G. 1998. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. Physica D. V. 112. No. 1–2. P. 1–39.

17. Sotomayor J. 1974. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds. Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5–46.

18. Takens F. 1974. Forced oscillations and bifurcations. Comm. Math. Inst. Rijacuniversiteit Utrecht. V. 3. P. 1–59.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Ройтенберг В.Ш. 2019. О бифуркациях однородных полиномиальных векторных полей на плоскости. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2):192–202. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202.

Roitenberg V.Sh. 2019. On bifurcations of homogeneous polinomial vector fields on the plane. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 192–202 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202.