МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.55
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-3-245-253

О РАЗРЕШИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ON THE SOLVABILITY AND STABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A POLYNOMIAL DIFFERENCE OPERATOR WITH VARIABLE COEFFICIENTS

М.С. Апанович
M.S. Apanovich

Красноярский государственный медицинский университет
имени профессора В.Ф. Войно-Ясенецкого,
Россия, 660022, г. Красноярск, ул. Партизана Железняка, 1

Krasnoyarsk State Medical University named after Prof. V. F. Voino-Yasenetsky,
1 Partizana Zheleznyaka St., Krasnoyarsk, 660022, Russian,

Аннотация
Рассматривается проблема разрешимости и устойчивости полиномиальных разностных операторов, основным источником появления которых является теория разностных схем. Основной результат работы сформулирован в теореме, в которой приведены условия на переменные коэффициенты полиномиального разностного оператора, обеспечивающие его разрешимость и устойчивость. Общая идея доказательства состоит в том, что мы сводим задачу Коши для полиномиального разностного уравнения к вопросу о разрешимости бесконечной системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Abstract
We study the solvability and stability of polynomial difference operators coming mainly from the theory of difference schemes. The main result of the paper is formulated in Theorem, which contains conditions on the variable coefficients of a polynomial difference operator that ensure its solvability and stability. The general idea of the proof is that we reduce the Cauchy problem for a polynomial difference equation to the question of the solvability of an infinite system of linear equations with an infinite number of unknowns.

Ключевые слова: полиномиальный разностный оператор, задача Коши, разрешимость, устойчивость.
Keywords: polynomial difference operator, Cauchy problem, solvability, stability.

1. Постановка задачи и основной результат

Для комплекснозначных функций $f(x)$ целочисленных переменных $x=(x_1,...,x_n)$ определим операторы δ_j сдвига по переменным x_j:

$$\delta_j f(x)= f(x_1,...,x_{j-1},x_j+1,x_{j+1},...,x_n)$$

и рассмотрим полиномиальный разностный оператор порядка m

$$P(\delta)=\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)\delta^\alpha ,$$

где $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$, $\delta^\alpha=\delta_1^{\alpha_1}...\delta_n^{\alpha_n}$, $c_\alpha(x)$ – коэффициенты разностного оператора, представляющие собой функции целочисленных переменных $x=(x_1,...,x_n)$.

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta)f(x)=g(x), x\in Z_+^n, \tag{1}$$

где $f(x)$ – неизвестная, а $g(x)$ – заданная на $Z_+^n=Z_+\times...\times Z_+$ функция и Z_+ – множество целых неотрицательных чисел.

Для $n>1$ пространство решений уравнения (1) бесконечномерно, для выделения из него единственного решения требуются дополнительные условия. Эти условия можно сформулировать различными способами (см., например, [1]). В данной работе определим их следующим образом.

Для двух точек x, y целочисленной решетки Z^n неравенство $x\ge y$ означает, что $x_i\ge y_i$ для $i=1,...,n$, а запись $x\not\ge y$ означает, что найдется $i_0\in\{1,...,n\}$ такое, что $x_{i_0}<y_{i_0}$.

Фиксируем мультииндекс β такой, что

$$|\beta|=m \text{ и } c_\beta(x)\ne 0, \text{ для всех } x\in Z_+^n. \tag{*}$$

Обозначим $X_{0,\beta}=\{x\in Z_+^n : x\not\ge\beta\}$ и сформулируем задачу:

найти решение $f(x)$ уравнения (1), которое для $x\in X_{0,\beta}$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$, т. е. удовлетворяет условию

$$f(x)=\varphi(x), x\in X_{0,\beta}. \tag{2}$$

Если $\beta=(m,0,...,0)$ или $\beta=(0,...,0,m)$, то с точки зрения теории разностных схем мы имеем явную разностную схему (см., например, [2]). В этом случае разрешимость и единственность задачи (1) – (2) очевидны.

Для других β таких, что $|\beta|=m$ может оказаться, что решение не единственное или что задача не имеет решений (см. [3]).

Задачу (1) – (2) будем называть задачей Коши для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$, а функцию $\varphi(x)$ – начальными данными этой задачи.

Нас интересуют условия на разностный оператор $P(\delta)$, обеспечивающие разрешимость задачи (1) – (2), т. е. существование и единственность решения для любых начальных данных $\varphi(x)$ и правых частей $g(x)$, и устойчивость задачи (1) – (2), т. е. существование постоянной M такой, что при любых $\varphi(x)$ и $g(x)$ для нормы соответствующего решения $f(x)$ задачи (1) – (2) справедлива оценка $\|f(x,y)\|_\infty\le M(\|g(x,y)_\infty\|+\|\varphi(x,y)\|_\infty)$.

Теорема. *Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ выполнено условие (*) и*

1) выполнено условие

$$|c_\beta(x)|>\sum_{|\alpha|=m,\alpha\ne\beta}|c_\alpha(x)|, x\in Z_+^n, \tag{3}$$

то задача (1)–(2) имеет единственное решение;

2) выполнено условие

$$|c_\beta(x)|>\sum_{\alpha\ne\beta}|c_\alpha(x)|, x\in Z_+^n, \tag{4}$$

то задача (1)–(2) устойчива.

Замечание 1. Очевидно, что если выполнено условие (4), то выполнено и условие (3).

2. Анализ проблемы и методы исследования

Отметим, что условие, аналогичное условию (3), использовалось в [4] для доказательства разрешимости в классе аналитических функций варианта обобщенной задачи Коши для полиномиального дифференциального оператора $P(D)$ с начально-краевыми условиями типа Рикье. Коэффициенты разложения в степенной ряд аналитических решений этой задачи удовлетворяют соотношениям вида (1)–(2). Отметим также работы [5], [6], в которых отыскание аналитических решений дифференциальных уравнений приводит к соотношениям вида (1)–(2) для коэффициентов разложения в ряд этих решений.

Случай постоянных коэффициентов рассматривается в работе [7], в которой исследована устойчивость однородной двухслойной линейной разностной схемы, а также в работах [8]–[12], где к исследованию устойчивости многослойных однородных разностных схем применяется теория амеб алгебраических гиперповерхностей и получена формула для решения задачи Коши через ее фундаментальное решение. Случай переменных коэффициентов рассматривается в [2], где исследуются однородные разностные схемы для стационарного уравнения и для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

Уравнения (1)–(2) мы рассматриваем как бесконечную систему линейных уравнений относительно бесконечного числа неизвестных $f(y)$, $y \in Z_+^n$. После упорядочения она примет специфический вид, а именно: в каждое уравнение системы войдет только конечное число неизвестных. Такая система совместна, если всякое конечное число уравнений из этой системы совместно (см. [13], лемма 6.3.7). Построим последовательность подсистем системы (1)–(2), которые состоят из конечного числа уравнений и в каждую следующую входят все уравнения предыдущей. Совместность каждой подсистемы из этой последовательности означает, что совместно и всякое конечное число уравнений из (1)–(2).

Возьмем произвольное $p \in Z_+$. Неизвестные $f(y)$ будем "нумеровать" элементами множества $J_p = \{y \in Z_+^n : |y| \le p\}$ и упорядочим это множество однородно-лексикографическим способом. Уравнения "занумеруем" элементами двух множеств $I_p = \{x \in Z_+^n : |x| \le p - m\}$ и $I_{\beta,p} = \{\mu \in X_{0,\beta} : |\mu| \le p\}$. Если обозначить $\# M$ – число элементов конечного множества M, то нетрудно видеть, что $\# I_p + \# I_{\beta,p} = \# J_p$. Так как $I_{\beta,p} + \{\beta + I_p\} = J_p$, то элементам множества $I_{\beta,p}$ присвоим те же "номера", с которыми они входят в множество J_p, а элементам x множества I_p – те "номера", с которыми $\beta + x$ входят в J_p.

Обозначим L_p систему уравнений относительно конечного числа неизвестных $f(y)$, $y \in J_p$ вида

$$\sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(x) f(x + \alpha) = g(x), x \in I_p, \tag{5}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \mu \in I_{\beta,p}. \tag{6}$$

Число уравнений $\#(I_p \sqcup I_{\beta,p})$ этой системы равно числу неизвестных $\# J_p$ (и равно числу N_p целых неотрицательных решений y неравенства $|y| \le p$). Отметим, что все уравнения из системы L_p входят в систему уравнений L_{p+1}.

Обозначим через $A_{\beta,p}$ матрицу системы уравнений (5)–(6), а через $\Delta_{\beta,p}$ – ее определитель. Его порядок равен N_p и по построению в строках, соответствующих уравнениям (6), все элементы, кроме стоящей на главной диагонали единицы, равны нулю. В строках, соответствующих уравнениям (5), на главной диагонали стоит коэффициент $c_\beta(x)$.

Пример 1. Рассмотрим для $n=2$ разностный оператор

$$P(\delta_1,\delta_2)=c_{2,0}(x,y)\delta_1^2+c_{1,1}(x,y)\delta_1\delta_2+c_{0,2}(x,y)\delta_2^2+c_{1,0}(x,y)\delta_1+c_{0,1}(x,y)\delta_2+c_{0,0}(x,y),$$

где

$$m=2,\ \beta=(1,1),$$

$$c_{2,0}(x,y)=x^4+3y^3+3,\ c_{1,1}(x,y)=10x^5+5y^5+20,\ c_{0,2}(x,y)=x^3+x^2+5y^3+4,$$

$$c_{1,0}(x,y)=2x^2+x+y^2+1,\ c_{0,1}(x,y)=x^3+2x^2+x+y^3+2,\ c_{0,0}(x,y)=2x+3y+1.$$

Для $p=3$ система уравнений (5)–(6) примет вид

$$c_{2,0}(x,y)f(x+2,y)+c_{1,1}(x,y)f(x+1,y+1)+c_{0,2}(x,y)f(x,y+2)+c_{1,0}(x,y)f(x+1,y)+$$

$$+c_{0,1}(x,y)f(x,y+1)+c_{0,0}(x,y)f(x,y)=g(x,y),\ (x,y)\in I_3 \tag{5'}$$

$$f(x,y)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in I_{(1,1),3} \tag{6'}$$

В ней десять неизвестных $f(y_1,y_2)$, $(y_1,y_2)\in J_3$,

$$J_3=\{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)\}.$$

Уравнения (5') нумеруются элементами множества $I_3=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})\}$, а уравнения (6') – элементами множества $I_{(1,1),3}=\{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(0,2),(3,0),(0,3)\}$. Так как объединение $I_3\sqcup I_{(1,1),3}$ дизъюнктное, то точки с координатами (x,y) и $(\bar{x},\bar{y})$ считаются различными.

Определитель $\Delta_{(1,1),3}$ этой системы равен

$$\Delta_{(1,1),3}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&2&3&20&4&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&3&0&4&6&0&4&30&6&0\\0&0&4&0&2&3&0&6&25&9\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{vmatrix}$$

3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Задача (1)–(2) для всех* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для всех* $p = 0,1,2,...$ *определители* $\Delta_{\beta,p} \neq 0$.

В определителях $\Delta_{\beta,p}$, $p = 0,1,2,...$, отвечающих за разрешимость задачи Коши, присутствуют все коэффициенты $c_\alpha(x)$ характеристического многочлена $P(z)$. Покажем, что разрешимость задачи (5)–(6) зависит в действительности только от коэффициентов однородной составляющей старшей степени этого многочлена, т. е. определяется главным символом разностного оператора.

Обозначим $I'_q = \{x \in Z_+^n : |x| = q - m\}$, $I'_{\beta,q} = \{\mu \in X_{0,\beta} : |\mu| = q\}$ и $J'_q = \{y \in Z_+^n : |y| = q\}$. Нетрудно видеть, что $\# I'_q + \# I'_{\beta,q} = \# J'_q = N'_q$, где N'_q – число целых неотрицательных решений уравнения $y_1 + ... + y_n = q$. Заметим, что $N'_0 + ... + N'_p = N_p$ – числу целых неотрицательных решений неравенства $y_1 + ... + y_n \le p$.

Для $q = 0,1,..., p$ обозначим $D_{\beta,q}$ миноры определителя $\Delta_{\beta,p}$, составленные из его строк, соответствующих уравнениям

$$P(\delta) f(x) = g(x),\ x \in I'_q,$$
$$f(\mu) = \varphi(\mu),\ \mu \in I'_{\beta,q}$$

и столбцов, соответствующих неизвестным $f(y)$, где $y \in J'_q$.

Отметим, что в определителях $D_{\beta,q}$ присутствуют только коэффициенты однородной составляющей старшей степени многочлена $P(z)$.

Пример 2. Для разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$, рассмотренного в примере 1, имеем для $q = 0,1,2,3$

$$D_{(1,1),0} = 1,\ D_{(1,1),1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ D_{(1,1),2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\ D_{(1,1),3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 30 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 25 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2. Если в определителе $D_{\beta,q}$ вычеркнуть строки и столбцы, соответствующие уравнениям (6), то получим определитель ленточной матрицы (см, например, [14]), которая использовалась в [3] для доказательства разрешимости задачи (1)–(2) в случае $n = 2$.

Связь между определителями $\Delta_{\beta,p}$ и $D_{\beta,q}$ дается следующей леммой.

Лемма 2. *Для всякого* $p \in Z_+$ *справедливо равенство* $\Delta_{\beta,p} = D_{\beta,0} \cdot D_{\beta,1} \cdot ... \cdot D_{\beta,p}$.

Пример 3. Для оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ из примеров 1, 2 в соответствии с леммой 2 имеем

$$D_{(1,1),0}=1,\ \Delta^1_{(1,1),3}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ \\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\1&2&3&20&4&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ \\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\3&0&4&6&0&4&30&6&0\\0&4&0&2&3&0&6&25&9\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),1}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},\ \Delta^2_{(1,1),3}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\3&20&4&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\ \\0&0&0&1&0&0&0\\4&6&0&4&30&6&0\\0&2&3&0&6&25&9\\0&0&0&0&0&0&1\end{vmatrix},$$

$$D_{(1,1),2}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&20&4\\0&0&1\end{vmatrix},\ \Delta^3_{(1,1),3}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\4&30&6&0\\0&6&25&9\\0&0&0&1\end{vmatrix}=D_{(1,1),3}.$$

$$\Delta_{(1,1),3}=D_{(1,1),0}\cdot D_{(1,1),1}\cdot D_{(1,1),2}\cdot D_{(1,1),3}.$$

Из лемм 1 и 2 сразу следует

Лемма 3. *Задача (5)–(6) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда* $D_{\beta,k}\neq 0$ *для всех* $k=0,1,2,\ldots$.

4. Доказательства

Доказательство леммы 1.

Необходимость. Предположим, что для некоторого $p_0\in Z_+$ определитель $\Delta_{\beta,p_0}=0$. Это означает, что найдется нетривиальная линейная комбинация левых частей уравнений системы L_{p_0} равная нулю, т. е.

$$\sum_{x\in I_{p_0}}A_x\sum_{|\alpha|\le m}c_\alpha(x)f(x+\alpha)+\sum_{\mu\in I_{\beta,p_0}}B_\mu f(\mu)=0.$$

Но тогда и для любых правых частей $g(x)$ и начальных данных $\varphi(x)$ этой системы получим

$$\sum_{x\in I_{p0}} A_x g(x)+\sum_{\mu\in I_{\beta,p0}} B_\mu \varphi(\mu)=0,$$

а в силу произвольности выбора $g(x)$ и $\varphi(x)$ все коэффициенты A_x и B_μ равны нулю.

Достаточность. Так как для любого $p\in Z_+$ определители $\Delta_{\beta,p}\neq 0$, то любая подсистема системы уравнений (1)–(2) из конечного числа уравнений совместна. Используя упомянутую выше лемму из [13] (лемма 6.3.7) получим, что решение задачи (1)–(2) существует. Если предположить, что оно не единственное, то для некоторого p окажется, что система уравнений L_p с правой частью равной нулю имеет нетривиальное решение, т. е. $\Delta_{\beta,p}=0$. Противоречие.

Доказательство леммы 2.

Будем последовательно преобразовывать определитель $\Delta_{\beta,p}$, пользуясь теоремой Лапласа.

На первом шаге $(q=0)$ разложим определитель $\Delta_{\beta,p}$ по строкам с номерами $x\in I'_0$, $\mu\in I'_{\beta,0}$. Единственный отличный от нуля минор порядка $N'_0=1$ обозначим $D_{\beta,0}$, очевидно $D_{\beta,0}=1$.

Определитель, полученный из $\Delta_{\beta,p}$ вычеркиванием этой строки и столбца, соответствующего неизвестной $f(0)$, обозначим $\Delta^1_{\beta,p}$. Очевидно, что $\Delta_{\beta,p}=D_{\beta,0}\cdot\Delta^1_{\beta,p}$.

На втором шаге $(q=1)$ разложим определитель $\Delta^1_{\beta,p}$ по строкам с номерами из множеств I'_1 и $I'_{\beta,1}$. Среди миноров порядка N'_1 не содержит нулевых строк только определитель, составленный из столбцов с номерами $y\in J'_1$. Обозначим этот минор $D_{\beta,1}$, тогда $\Delta^1_{\beta,p}=D_{\beta,1}\cdot\Delta^2_{\beta,p}$, где определитель $\Delta^2_{\beta,p}$ получен из определителя $\Delta^1_{\beta,p}$ вычеркиванием строк с номерами $x\in I'_1$ и $\mu\in I'_{\beta,1}$ и столбцов с номерами $y\in J'_1$.

Продолжая процедуру, на $(q+1)$-ом шаге среди миноров порядка N'_q определителя $\Delta^q_{\beta,p}$, соответствующих строкам с номерами из множеств I'_q и $I'_{\beta,q}$ не содержит нулевой строки только определитель, составленный из столбцов с номерами $y\in J'_q$, т. е. $D_{\beta,q}$. Таким образом, $\Delta^q_{\beta,p}=D_{\beta,q}\cdot\Delta^{(q+1)}_{\beta,p}$.

Так как на последнем p-ом шаге $\Delta^p_{\beta,p}=D_{\beta,p}$, то $\Delta_{\beta,p}=D_{\beta,0}\cdot D_{\beta,1}\cdot\ldots\cdot D_{\beta,p}$.

Доказательство теоремы 1.

1. У определителя $\Delta_{\beta,p}$ на главной диагонали стоят единицы и выделенный коэффициент $c_\beta(x)$. Согласно лемме 2 имеем $\Delta_{\beta,p}=D_{\beta,0}\cdot D_{\beta,1}\cdot\ldots\cdot D_{\beta,p}$, где $D_{\beta,q}$ – главные миноры определителя $\Delta_{\beta,p}$ порядка N'_q. Определители $D_{\beta,q}$ зависят только от коэффициентов $c_\alpha(x)$ однородной составляющей старшей степени. Если выполнено условие (3), то $D_{\beta,q}$ являются определителями матриц с диагональным преобладанием, поэтому $D_{\beta,q}\neq 0$. По лемме 3 задача (1)–(2) имеет единственное решение.

2. Обозначим $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ максимум-норму матрицы A, а через $R_i(A) = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $i = 1,2,...,n$, обозначим величину диагонального преобладания в i-ой строке, а также положим $R_*(A) = \min_{1 \le i \le n} R_i(A)$. Если $R_*(A) \ge 0$, то A – матрица с диагональным преобладанием (см., например, [15],[16]).

Для доказательства устойчивости потребуется оценка нормы матрицы $A^{-1}_{\beta,p}$, обратной к матрице $A_{\beta,p}$ подсистемы (5)–(6).

Для любого $p \in Z_+$ величины диагонального преобладания в строках с "номерами" $\mu \in I_{\beta,p}$ равны $R_\mu(A_{\beta,p}) = 1$, а в строках с "номерами" $x \in I_p$ равны $R_x(A_{\beta,p}) = |c_\beta(x)| - \sum_{\alpha \neq \beta} |c_\alpha(x)|$ и эти величины не зависят от p. В силу условия (4) $R_x(A_{\beta,p}) = \left\{1, |c_\beta(x)| - \sum_{\alpha \neq \beta} |c_\alpha(x)|\right\} = R_* \neq 0.$ Для матрицы $A_{\beta,p}$ с диагональным преобладанием справедлива оценка (см., например, [15],[16])

$$\|A^{-1}_{\beta,p}\|_\infty \le \frac{1}{R_*}. \tag{7}$$

Рассмотрим вектор f_p с координатами $f(y)$, $y \in J_p$ и вектор h_p с координатами $g(x)$, $\varphi(\mu)$, где $x \in I_p$, $\mu \in I_{\beta,p}$, $\|h_p\|_\infty \le \left(\|g(x)\|_\infty + \|\varphi(x)\|_\infty\right)$ для всех p. Систему (5)–(6) запишем в виде $A_{\beta,p} f_p = h_p$, где $\Delta_{\beta,p} \neq 0$, отсюда найдем $f_p = A^{-1}_{\beta,p} h_p$. Оценим норму f_p с учетом (7):

$$\|f_p\|_\infty = \|A^{-1}_{\beta,p} h_p\|_\infty \le \|A^{-1}_{\beta,p}\|_\infty \|h_p\|_\infty \le \frac{1}{R_*}\|h_p\|_\infty \le M\left(\|g(x)\|_\infty + \|\varphi(x)\|_\infty\right).$$

Поскольку неравенство справедливо для любого p, то

$$\|f\|_\infty \le M\left(\|g(x)\|_\infty + \|\varphi(x)\|_\infty\right).$$

Таким образом, задача (1)–(2) устойчива.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00232.

Список литературы
References

1. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. 2000. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. Discrete Mathematics, 225: 51–75.

2. Самарский А.А. 1977. Теория разностных схем. М., Наука, 656.

Samarskiy A.A. 1977. Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. Moscow, Nauka, 656. (in Russian)

3. Рогозина М.С. 2014. О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора. Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 14(3): 83–94.

Rogozina M.S. 2016. Solvability of the Cauchy Problem with a Polynomial Difference Operator. Journal of Mathematical Sciences, 213 (6): 887–896.

4. Хермандер Л. 1965. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Перев. с англ. М., Мир, 379. (Hörmander L. 1963. Linear partial differential operators. Springer, 292.)

Khermander L. 1965. Lineynye differentsial'nye operatory s chastnymi proizvodnymi [Linear partial differential operators]. Moscow, Mir, 379. (Hörmander L. 1963. Linear partial differential operators. Springer, 292.)

5. Гюнтер Н.М. 1925. О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных. Математический сборник, 32 (2): 367–447.

Gyunter N.M. 1925. O rasprostranenii teoremy Koshi na lyubuyu sistemu uravneniy v chastnykh proizvodnykh [On the extension of Cauchy's theorem to any system of partial differential equations]. Sbornik: Mathematics, 32 (2): 367–447. (in Russian)

6. Казаков А.Л. 2007. Обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы. Сибирский математический журнал, 48 (5): 1041–1055.

Kazakov A.L. 2007. The generalized Cauchy problem with data on two surfaces for a quasilinear analytic system. Siberian Mathematical Journal, 48(5): 837–848.

7. Федорюк М.В. 1987. Асимптотика: интегралы и ряды. М., Наука, 546.

Fedoryuk M.V. 1987. Asimptotika: integraly i ryady [Asymptotics. Integrals and series]. Moscow, Nauka, 546. (in Russian)

8. Лейнартас Е.К. 2011. Устойчивость задачи Коши для многомерного разностного оператора и амеба характеристического множества. Сибирский математический журнал, 52 (5): 1087–1095.

Leinartas E.K. 2011. Stability of the Cauchy problem for a multidimensional difference operator and the amoeba of the characteristic set. Siberian Mathematical Journal, 52 (5): 864–870.

9. Рогозина М.С. 2012. Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей. Журнал СФУ. Математика и физика, 5 (2): 256–263.

Rogozina M.S. 2012. Stability of multilayer finite difference schemes and amoebas of algebraic hypersurfaces. Journal of Siberian Federal University, 5 (2): 256–263. (in Russian, with English summary)

10. Некрасова Т.И. 2014. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений. Известия Иркутского государственного университета, 9: 91–102.

Nekrasova T.I. 2014. On the Hierarchy of Generating Functions for Solutions of Multidimensional Difference Equations. The Bulletin of Irkutsk State University, 9: 91–102. (in Russian, with English summary)

11. Лейнартас Е.К., Рогозина М.С. 2015. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов. Сибирский математический журнал, 56 (1): 111–121.

Leinartas E.K., Rogozina M.S. 2015. Solvability of the Cauchy problem for a polynomial difference operator and monomial bases for the quotients of a polynomial ring. Siberian Mathematical Journal, 56 (1): 92–100.

12. Лейнартас Е.К., Ляпин А.П. 2009. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов. Журнал СФУ. Математика и физика, 2 (4) 449–455.

Leinartas E.K., Lyapin A.P. 2009. On rationality multidimentional recursive power series. Journal of Siberian Federal University, 2 (4): 449–455. (in Russian, with English summary)

13. Хермандер Л. 1968. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. Перев. с англ. М., Мир, 280. (Hörmander L. 1966. An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, 208.)

Khermander L. 1968. Vvedenie v teoriyu funktsiy neskol'kikh kompleksnykh peremennykh [An introduction to complex analysis in several variables]. Moscow, Mir, 280. (Hörmander L. 1966. An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, 208.)

14. Ильин В.П., Лиснянский И.М. 1978. О решении алгебраических уравнений с ленточными теплицевыми матрицами. Сибирский математический журнал, 19 (1): 44–48.

Il'in V.P., Lisnyanskiy I.M. 1978. O reshenii algebraicheskikh uravneniy s lentochnymi teplitsevymi matritsami [On the solution of algebraic equations with ribbon Toeplitz matrices]. Siberian Mathematical Journal, 19 (1): 44–48. (in Russian)

15. Taussky O. 1949. A recurring theorem on determinants. The American Mathematical Monthly, 56 (1): 672–676.

16. Ahlberg J.H., Nilson E.N. 1963. Convergence properties of the spline fit. J.SIAM, 11 (1): 95–104.