МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.956
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-5-13

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE CYLINDRICAL DOMAIN FIR THE MULTIDIMENSTIONAL WAVE EQUATION

С.А. Алдашев
S.A. Aldashev

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Ministry of Education and Science, Almaty, Kazakhstan

E-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация
Адамар показал, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение поведения колеблющейся струны - некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как заметили А. В. Бицадзе и А. М. Нахушев, задача Дирихле некорректна (в смысле однозначной разрешимости) не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. Ранее были изучены задачи Дирихле и Пуанкаре, и связанные с ними локальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений, и показано, что однозначная разрешимость этих задач существенно зависит от высоты рассматриваемых цилиндрических областей. Нелокальные краевые задачи для этих уравнений не исследованы. В данной статье, используя метод, предложенный автором ранее, показана однозначная разрешимость и получен явный вид классических решений нелокальных краевых задач для многомерного волнового уравнения в цилиндрической области, которые являются обобщением смешанной задачи и задач Дирихле и Пуанкаре. Получен критерий единственности регулярного решения этих задач.

Abstract
Hadamard showed that one of the fundamental problems of the mathematical physics - the study of the oscillating string - is ill-posed when the boundary value conditions are defined on the entire boundary of the domain. A.V. Bitsadze and A.M. Nakhushev noted that the Dirichlet problem is ill-posed (in terms of unique solvability) not only for the wave equation but for the general hyperbolic equations. The Dirichlet and Poincare problems, and their related local boundary value problems for multidimensional hyperbolic equations have been studied, and it has been shown that the unique solvability of these problems crucially depends on the height of the cylindrical domain under study. Non-local boundary value problems for these equations have not yet been analyzed. Using the method proposed by the author earlier, this paper shows the unique solvability and obtains the explicit form of the classical solution for the multidimensional wave equation in the cylindrical domain, which are the generalization of the mixed problem and the Dirichlet and Poincare problems. We also obtain the criterion of uniqueness of the regular solution of these problems.

Ключевые слова: нелокальная задача; многомерное уравнение; критерий единственности; однозначная разрешимость; функции Бесселя.

Keywords: non-local problem, multidimensional equation, uniqueness criterion, unique solvability, Bessel functions.

1. Введение

Локальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений изучены в [1-7,12,13].

Насколько нам известно, для этих уравнений нелокальные краевые задачи еще не исследованы.

В работе показана однозначная разрешимость и получен явный вид классических решений нелокальных краевых задач для многомерного волнового уравнения в цилиндрической области, которые являются обобщением смешанной задачи и задач Дирихле и Пуанкаре. Получен критерий единственности регулярного решения этих задач.

2. Постановка задачи и результат

Пусть D_α – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=0$ где $|x|$ – длина вектора $x=(x_1,...,x_m,)$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega$ области Ω обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ соответственно.

В области D_α рассмотрим многомерное волновое уравнение

$$\Delta_x u-u_{tt}=0, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x=(x_1,...,x_m)$, $m\geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1}$, t, $r\geq 0, 0\leq\theta_i\leq\pi, i=1,2,...,m-2$, $0\leq\theta<2\pi, \theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Рассмотрим следующие нелокальные краевые задачи

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C(\overline{D_\alpha})\cap\tilde{N}^1(D_\alpha\cup S_0\cup S_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases}\beta_1 u(r,\theta,0)=\gamma_1 u(r,\theta,\alpha)+\varphi_1(r,\theta),\\ \beta_2 u_t(r,\theta,0)=\gamma_2 u_t(r,\theta,\alpha)+\varphi_2(r,\theta), u|_{\Gamma_\alpha}=\psi(t,\theta).\end{cases} \tag{2}$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C(\overline{D_\alpha})\cap\tilde{N}^1(D_\alpha\cup S_0)\cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(r,\theta,0)=\varphi_1(r,\theta), \beta_1 u_t(r,\theta,0)=\gamma_1 u(r,\theta,\alpha)+\varphi_2(r,\theta),\ u|_{\Gamma_\alpha}=\psi(t,\theta), \tag{3}$$

где $\beta_j,\ \gamma_j=const,\ \beta_j^2+\gamma_j^2\neq 0,\ j=1,2.$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leq k\leq k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_0)$, $l=0,1,...$ - пространства Соболева.

Имеет место ([8])

Лемма 1. *Пусть* $f(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$. *Если* $l\geq m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l - m + 1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того, чтобы* $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$\left|f_0^1(r)\right| \le c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \le c_2,\quad c_1, c_2 = const.$$

Через, $\overline{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta), \psi(t,\theta)$.

Пусть $\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S_0), \psi(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l > \dfrac{3m}{2}$.

Тогда справедлива

Теорема . *Если выполняется условие*

$$(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)\cos\mu_{s,n}\alpha \ne \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, s = 1, 2, ..., \tag{5}$$

то задача 1 однозначно разрешима. Если выполняется условие

$$\gamma_1 \sin\mu_{s,n}\alpha \ne \mu_{s,n}\beta_1, s = 1, 2, ..., \tag{6}$$

то задача 2 имеет единственное решение, где $\mu_{s,n}$ – *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Теорема 2. *Решение задачи 1 единственно тогда и только тогда, когда имеет место соотношение (5). Решение задачи 2 единственное тогда и только тогда, когда выполняется условие (6).*

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу 1. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0, \tag{7}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно ([8]), что спектр оператора δ состоит из собственных $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, ...,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\overline{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (8) в (7), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([8]), будем иметь

$$\overline{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k - \overline{u}_{ntt}^k = 0,\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, ..., \tag{9}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\begin{aligned}&\beta_1 \overline{u}_n^k(r,0)=\gamma_1 \overline{u}_n^k(r,\alpha)+\overline{\varphi}_{1n}^k(r),\ \beta_2 \overline{u}_{nt}^k(r,0)=\gamma_2 \overline{u}_{nt}^k(r,\alpha)+\overline{\varphi}_{2n}^k(r),\\ &\overline{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(r), k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots .\end{aligned} \tag{10}$$

В (9), (10) произведя замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$ получим

$$\overline{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{\upsilon}_n^k-\overline{\upsilon}_{ntt}^k=\overline{f}_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\beta_1 \overline{\upsilon}_n^k(r,0)=\gamma_1 \overline{\upsilon}_n^k(r,\alpha)+\overline{\varphi}_{1n}^k(r),\ \beta_2 \overline{\upsilon}_{nt}^k(r,0)=\gamma_2 \overline{\upsilon}_{nt}^k(r,\alpha)+\overline{\varphi}_{2n}^k(r),\\ &\overline{\upsilon}_n^k(1,t)=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots .\end{aligned} \tag{12}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t)=\psi_{ntt}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k, \varphi_{1n}^k(r)=\overline{\varphi}_{1n}^k+\gamma_1\psi_n^k(\alpha)-\beta_1\psi_n^k(0),$$

$$\varphi_{2n}^k(r)=\overline{\varphi}_{2n}^k(r)+\gamma_2\psi_{nt}^k(\alpha)-\beta_2\psi_{nt}^k(0).$$

Произведя замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (11), (12) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k-\upsilon_{ntt}^k+\frac{\overline{\lambda_n}}{\rho^2}\upsilon_n^k=f_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\beta_1 \upsilon_n^k(r,0)=\gamma_1 \upsilon_n^k(r,\alpha)+\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \beta_2 \upsilon_{nt}^k(r,0)=\gamma_2 \upsilon_{nt}^k(r,\alpha)+\tilde{\varphi}_{2n}^k(r),\\ &\upsilon_n^k(1,t)=0,\ k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots .\end{aligned} \tag{14}$$

$$\overline{\lambda}_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4},\ \ f_n^k(r,t)=r^{\frac{m-1}{2}}\overline{f}_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\varphi}_{jn}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{jn}^k(r),\ j=1,2.$$

Решение задачи (13), (14) рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{15}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{ns}^k(t)R_s(r),\ \tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{ns}^kR_s(r),\ \tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{ns}^kR_s(r). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), (14), с учетом (16), получим

$$R_{srr}+\left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}+\mu\right)R_s=0,\ 0<r<1, \tag{17}$$

$$R_s(1)=0,\ |R_s(0)|<\infty, \tag{18}$$

$$T_{stt}(t)+\mu T_s(t)=-a_{ns}^k(t),\ 0<t<\alpha, \tag{19}$$

$$\beta_1 T_s(0) = \lambda_1 T_s(\alpha) + b_{ns}^k,\ \beta_2 T_{st}(0) = \gamma_2 T_{st}(\alpha) + e_{ns}^k. \tag{20}$$

Ограниченным решением задачи (17), (18) является ([9])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{21}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (19) представимо в виде ([9])

$$\begin{gathered} T_{s,n}(t) = c_{1s}\cos\mu_{s,n}t + c_{2s}\sin\mu_{s,n}t + \frac{\cos\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a_{ns}^k(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi - \\ -\frac{\sin\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a_{ns}^k(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi, \end{gathered} \tag{22}$$

c_{1s}, c_{2s} – произвольные постоянные, удовлетворив условию (20) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left(\beta_1 - \gamma_1\cos\mu_{s,n}\alpha\right)\tilde{n}_{1s} - \gamma_1\tilde{n}_{2s}\sin\mu_{s,n}\alpha = \\ = \frac{\gamma_1}{\mu_{s,n}}\left[\cos\mu_{s,n}\alpha\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi - \sin\mu_{s,n}\alpha\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi\right] + b_{ns}^k, \\ \gamma_2 c_{1s}\sin\mu_{s,n}\alpha + \left(\beta_2 - \gamma_2\cos\mu_{s,n}\alpha\right)c_{2s} = \\ = \frac{\left[e_{ns}^k - \gamma_2\left(\sin\mu_{s,n}\alpha\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi d\xi + \cos\mu_{s,n}\alpha\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi d\xi\right)\right]}{\mu_{s,n}}, \end{cases} \tag{23}$$

которое имеет единственное решение, если выполняется условие (5).

Подставляя (21) в (16) получим

$$\begin{gathered} r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r). \end{gathered} \tag{24}$$

Ряды (24)-разложение в ряды Фурье-Бесселя ([10]), если

$$\begin{gathered} a_{ns}^k(t) = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi), \\ b_{ns}^k = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi), \\ e_{ns}^k = 2\left[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})\right]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi), \end{gathered} \tag{25}$$

$\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (21), (22) имеем решение задачи (13), (14) в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}r), \tag{26}$$

где $a_{ns}^k(t)$, b_{ns}^k, e_{ns}^k определяются из (25), а c_{1s}, c_{2s} − из (23).

Таким образом, из (8) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left[\psi_n^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)\right]Y_{n,m}^k(\theta), \tag{27}$$

где $\upsilon_n^k(r,t)$ находятся из (26).

Учитывая формулу ([10]) $2J_\nu^{/}(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$, оценки ([11,18])

$$\begin{gathered}J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right),\ \nu\geq 0,\\ |k_n|\leq c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^l}{\partial\theta_j^l}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l},\ j=\overline{1,\ m-1}, l=0,1,...,\end{gathered} \tag{28}$$

а также леммы, условия на заданные функции $\varphi_1(r,\theta),\varphi_2(r,\theta),\psi(r,\theta)$, как в ([3-7]), можно показать, что полученное единственное решение (27) принадлежит классу $C(\overline{D}_\alpha)\cap C^1(D_\alpha\cup S_\alpha\cup S_0)\cap C^2(D_\alpha)$.

Следовательно, задача 1 однозначно разрешима.

Теперь рассмотрим задачу 2. Ее решение, также будем искать в виде ряда (8), где функции $\overline{u}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично задаче 1, $\overline{u}_n^k$ удовлетворяет уравнению (9), при этом краевое условие (3), в силу (8) запишется в виде

$$\begin{gathered}\overline{u}_n^k(r,0)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r),\ \beta_1\overline{u}_{nt}^k(r,0)=\gamma_2\overline{u}_n^k(r,\alpha)+\overline{\varphi}_{2n}^k(r),\\ \overline{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t),\ k=\overline{1,k_n}, n=0,1,\dots .\end{gathered} \tag{29}$$

Произведя сначала замену $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$, а затем $\overline{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$ задачу (9), (29) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k(r,t)=f_n^k(r,t), \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\upsilon_n^k(r,0)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\beta_1\upsilon_{nt}^k(r,0)=\gamma_1\upsilon_n^k(r,\alpha)+\tilde{\varphi}_{2n}^k(r),\\ \upsilon_n^k(1,t)=0, k=\overline{1,k_n}, n=0,1,...,\end{gathered} \tag{31}$$

где $\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\left(\overline{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_n^k(0)\right)$, $\tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\left(\overline{\varphi}_{2n}^k(r)-\gamma_1\psi_n^k(\alpha)-\beta_1\psi_{nt}^k(0)\right)$.

Если решение задачи (30), (31) будем искать в виде (15), то приходим к задаче (17), (18) и к задаче для (19) с данными

$$T_s(0)=b_{ns}^k,\ \beta_1 T_{st}(0)=\gamma_1 T_s(\alpha)+e_{ns}^k. \tag{32}$$

Удовлетворив общее решение (22) уравнения (19) краевому условию (32) будем иметь

$$\begin{cases} c_{1s} = b_{ns}^k, \\ \left(\mu_{s,n}\beta_1 - \gamma_1 \sin \mu_{s,n}\alpha\right)\tilde{n}_{2s} = \gamma_1 b_{ns}^k \cos \mu_{s,n}\alpha + \\ + \dfrac{\gamma_1}{\mu_{s,n}}\left[\cos \mu_{s,n}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\sin \mu_{s,n}\xi d\xi - \right. \\ \left. - \sin \mu_{s,n}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)\cos \mu_{s,n}\xi d\xi \right] + e_{ns}^k, \end{cases} \tag{33}$$

из которого однозначно определяются коэффициенты c_{1s}, c_{2s}, если выполняется условие (6).

Таким образом, из (21), (22) получим решение задачи (30), (31) в виде (26), где $a_{ns}^k(t)$, b_{ns}^k, e_{ns}^k находятся из (25), а c_{1s}, c_{2s} – из (33).

Следовательно, единственное решение задачи 2 представимо по формуле (27).

Теорема 1 доказана.

Теперь докажем теорему 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 вытекает единственность решения задачи 1. Пусть теперь условие (5) нарушено, хотя бы для одного $s = l$. Тогда нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задачи 1 является

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{l,n}(t) J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{l,n} r), \tag{34}$$

где

$$T_{l,n}(t) = \begin{cases} \cos \mu_{l,n} t + \sin \mu_{l,n} t, \ \gamma_j \neq 0, \ j = 1, 2, \\ \sin \mu_{l,n} t, \ \gamma_1 = 0, \ \gamma_2 \neq 0, \\ \cos \mu_{l,n} t, \ \gamma_2 = 0, \ \gamma_1 \neq 0, \end{cases}$$

при этом из (28) получим, что функция (34) принадлежит искомому классу, если $p > \dfrac{3m}{2}$.

Если имеет место соотношение (6), то из теоремы 1 следует единственность решения задачи 2. Пусть теперь условие (6) не выполняется хотя бы для одного $s = l$. Тогда ненулевым решением однородной задачи 2 будет функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left(\sin \mu_{l,n} t\right) J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{l,n} r),$$

которая принадлежит классу $C(D_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$ при $p > \dfrac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

3. Заключение

В работе показана однозначная разрешимость и получен явный вид нелокальных краевых задач в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения, которые являются обобщением смешанной задачи и задач Дирихле и Пуанкаре. Показан также критерий единственности регулярного решения этих задач.

Список литературы
References

1. Нахушев А.М. 2006. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, Москва, Наука.

Nakhushev A.M. 2006. The Problems with a Shift for Partial Differential Equations (in Russian), Moscow, Nauka.

2. Алдашев С.А. 2010. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения. Современная математика и ее приложения. Уравнения с частными производными, 67: 28-32.

Aldashev S.A. 2010. The well-posedness of the Poincare problem in cylindrical domain for the multidimensional wave equation (in Russian). Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Uravneniya s Chastnymi Proizvodnymi, 67: 28-32.

3. Алдашев С.А. 2011. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академи наук, 13(1): 21-29.

Aldashev S.A. 2011. The well-posedness of the Dirichlet problem in cylindrical domain for the multidimensional hyperbolic equations with a wave operator (in Russian).Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi Akademii Nauk, 13(1): 21-29.

4. Алдашев С.А. 2013. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором. Журнал вычислительной и прикладной математики, № 4(114): 68-76.

Aldashev S.A. 2013. The well-posedness of the Poincare problem in cylindrical domain for the multidimensional hyperbolic equations with a wave operator (in Russian). Zhurnal Vychislitelnoi i Prikladnoi Matematiki, № 4(114): 68-76.

5. Алдашев С.А. 2012. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного волнового уравнения. Вестник Самарского гос.техн.ун-та, Сер. физ.-мат. Науки, № 4(29): 48-55.

Aldashev S.A. 2012. The well-posedness of the local boundary value problem in cylindrical domain for the multidimensional wave equation (in Russian).Vestnik Samarskogo Gos. Tech. Universiteta, Ser. Fiz.-Mat. Nauki, № 4(29): 48-55.

6. Алдашев С.А. 2015. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором. Вестник НГУ , Сер. мат., мех. и инф.,15, № 4: 3-11.

Aldashev S.A. 2015. The well-posedness of the local boundary value problem in cylindrical domain for the multidimensional hyperbolic equations with a wave operator (in Russian). Vestnik NGU, Ser. Mat., Mech. and Inf., 15, № 4: 3-11.

7. Алдашев С.А. 2017. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором. Укр. матем. журнал, 69,№ 7: 992-999.

Aldashev S.A. 2017. The well-posedness of the mixed problem in cylindrical domain for the multidimensional hyperbolic equations with a wave operator (in Russian). Ukr. Mat. Zhurnal}, 69, no. 7: 992-999.

8. Михлин С.Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 254 с.

Mikhlin S.G. 1962. Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations (in Russian). Moscow, Fizmatgiz.

9. Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 703 с.

Kamke E. 1965. The Handbook of Ordinary Differential Equations (in Russian). Moscow, Nauka.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1974. Высшие трансцендентные функции, т.2. М.: Наука, 295 с.

Bateman, G. Erdelyi, A. 1974. The Higher Transcendental Functions, 2 (in Russian). Moscow, Nauka.

11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1966. Уравнения математической физики, М.: Наука, 724с.

Tikhonov, A., N., Samarskii A. A. 1966. The Equations of Mathematical Physics (in Russian), Moscow, Nauka.

12. Aldashev S. A. 2010. The well-posedness of the Dirichet problem in the cylindric domain for the multidimensional ware equation. Mathematical Problems in Engineering, Article ID653215: 1-7.

Aldashev S. A. 2010. The well-posedness of the Dirichet problem in the cylindric domain for the multidimensional ware equation. Mathematical Problems in Engineering, Article ID653215:1-7.

13. Aldashev S. A. 2011. The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation. Journal of Mathematical Sciences, 173, no. 2: 150-154.

Aldashev S. A. 2011. The well-posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation. Journal of Mathematical Sciences, 173, no. 2: 150-154.