

УДК 536.1:514.8

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-270-279

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ
ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА****THE DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR DESCRIPTION THE SPACE
OF CONDITIONS OF IDEAL GAS****Г.В. Аверин, М.В. Шевцова
G.V. Averin, M.V. Shevtsova**Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

Belgorod National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

Belgorod State Technological University named after V.G. Shoukhov, 46 Kostyukova St, Belgorod,
308012, Russia

E-mail: averin@bsu.edu.ru, mashashev81@gmail.com

Аннотация

Рассматривается задача формулировки положений и соотношений термодинамики для пространства состояний идеального газа на основе анализа решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Показана связь характеристик дифференциальных уравнений в частных производных с энтропией, как термодинамической функцией состояния. Выполнено геометрическое представление полученных интегральных поверхностей и установлена взаимозависимость между физическим содержанием термодинамических величин (температуры, энтропии, энергии) и их математическими аналогами. Показано, что численными методами с использованием средств компьютерной математики можно установить закономерности осуществления термодинамических процессов и циклов при описании их функциями времени. Сформулировано предположение, что необратимость термодинамических процессов может быть связана с темпоральными особенностями осуществления этих процессов. Предложенный подход позволяет дать простую геометрическую интерпретацию основным положениям и соотношениям классической термодинамики.

Abstract

In this article the problem of a wording of thermodynamic provisions and ratios for the spaces of ideal gas conditions is considered. The procedure of solving of this task is based on the analysis of solutions of partial differential equations of the first order. The solution of the equation is carried out by method of characteristics. It is shown that characteristics of partial differential equations are connected with entropy as a thermodynamic function of condition. Geometric presentation of the received integrated surfaces is executed. The connection between physical content of thermodynamic sizes (temperature, entropy, energy) and their mathematical analogs is established. By numerical methods using the means of computer mathematics it is illustrated the possibility of establishing consistent patterns of implementation of thermodynamic processes and cycles at the description them as functions of time. The assumption is formulated that irreversibility of thermodynamic processes can be connected with temporal features of implementation of these processes. The offered approach allows to give simple geometric interpretation of basic provisions and ratios of classical thermodynamics.

Ключевые слова: идеальный газ, положения и соотношения термодинамики, геометрическая интерпретация.

Keywords: ideal gas, provisions and ratios of thermodynamics, geometric interpretation.

Введение

Классическая термодинамика является теоретической основой для многих физических наук. А. Эйнштейн отмечал универсальность, оригинальность построения теории термодинамики и обширную область ее применения при изучении физических процессов и явлений. Однако, несмотря на основательность, теория термодинамики не является полной, многие ее аспекты противоречивы и запутаны, ряд положений не имеет логической ясности [Базаров, 1991; Пригожин, 2002]. Аксиоматическое построение термодинамики так и не было завершено, несмотря на многие работы в этой области следующих авторов: Афанасьевой-Эренфест [1928], Борна [1964], Гухмана [1986], Каратеодори [1964], Петрова и Бранкова [1986], Франкфурта [1964], Джамати [Giamati, 1962], Ландсберга [Landsberg, 1970], Лайеб [Lieb, 1999], Фалька и Юнга [Falk, 1959]. С термодинамической аксиоматикой тесно связана проблема энтропии и развитие различных систем обоснования ее существования. Факт существования энтропии, как одного из основных положений термодинамики, фундаментальный принцип ее возрастания и связь энтропии с необратимостью процессов в природе пока полностью не изучены. Доступных опытных данных в этой области крайне мало, если точнее сказать, вообще нет. В чем суть необратимости – это и сегодня не до конца решенная задача термодинамики. Известный тезис Планка, что вместе с необратимостью «стоит и падает вся термодинамика» говорит о том, насколько важен данный вопрос.

Вторая проблема связана с тем, что, оперируя термодинамическими процессами, которые протекают во времени, классическая термодинамика не дает ответа на вопрос о месте времени в своей теории. Как отмечает ряд авторов, термодинамика по своей сути является термостатикой. Время и необратимость процессов – очень сложный вопрос термодинамики, который умышленно из классической был перенесен в неравновесную термодинамику, чтобы не нарушать целостности исходной теории. Скорее всего, с понятием равновесного (бесконечно медленного) процесса связан парадокс исключения времени из соотношений классической термодинамики. Однако множество термодинамических экспериментов вовсе не предусматривает осуществление очень медленных (равновесных, квазистатических) процессов [Робертс, 1950]. Крайне сложно представить существование равновесных процессов, связанных с плавлением веществ простым трением (опыты Деви), равновесных процессов в опытах Джоуля с падающим грузом или в опытах по экспериментальному исследованию адиабатических процессов (например, опыты Клемана, Люммера, Партингтона и др.).

Нельзя пока утверждать, что сущность проблемы необратимости заключается в медленном или быстром течении процесса. Однако гипотеза, что необратимость тесно связана с особенностями и закономерностями развития термодинамических процессов во времени, имеет право на первоочередное обоснование. Поэтому аналитически эта проблема может быть изучена только при введении параметра времени в уравнения классической термодинамики.

Чтобы подойти к изучению указанных выше вопросов, обратимся к понятию идеального газа. Модель идеального газа является крайне важной в термодинамике, так как этот газ является эталонным объектом для разработки шкал термометров и создания процедур сравнения состояний различных веществ с состояниями идеального газа по факту измерения температуры. Данная модель является достаточно простой и наглядной и допускает геометрическую интерпретацию основных понятий и соотношений в трехмерном пространстве. Однако, как показал анализ литературных источников, соответствующих работ, посвященных раскрытию геометрического смысла и интерпретации термодинамических величин, соотношений и законов, крайне мало. Данное направление исследований затронуто больше всего в работах К. Каратеодори [1964], Фалька и Юнга [Falk, 1959] и Млодзеевского [1956]. Пока нет ясного и наглядного представления о сведениях термодинамических процессов и объектов к пространственным геометрическим структурам и отношениям. Исходя из этого отсутствуют явные аналогии

между физическим содержанием величин (температуры, теплоты, энтропии, энергии и т. д.) и их математическими моделями в геометрических пространствах состояний термодинамических систем.

В работах Аверина [2014a], Шевцовой и Аверина [2016с], Звягинцевой и Аверина [2016d], [Averin, Zviagintseva, 2016e] ранее предпринимались попытки применения методов и средств дифференциальной геометрии при обосновании моделей термодинамических состояний, процессов, соотношений и закономерностей. На наш взгляд, перспективный подход в решении этой задачи лежит в анализе решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и дифференциальных форм Пфаффа [Звягинцева, Аверин, 2016b], которые положены в основу теории термодинамики.

Исходя из сказанного выше, целью данной статьи является установление связи между физическим содержанием основных термодинамических величин и их моделями на основе применения методов и средств дифференциальной геометрии. Это позволит дать геометрическую интерпретацию основным положениям и соотношениям классической термодинамики. Исследование этой задачи при описании процессов во времени возможно как путем аналитического решения дифференциальных уравнений термодинамики, так и за счет применения методов и средств вычислительной математики.

Постановка задачи

Под термодинамической системой обычно понимается совокупность макроскопических тел и полей физической природы, которые представляют собой целостный объект и взаимодействуют как между собой, так и с окружающей средой. При этом состояние системы определяется как совокупность ее термодинамических свойств, параметры которых формируются под действием условий окружающей среды в конкретный момент времени. Для идеального газа это означает, что каждое его состояние однозначно определено значениями удельного объема ν и давления p .

Экспериментально установленный и логически обоснованный закон сохранения энергии в термодинамике является тем основным положением, на котором строится вся ее теория и формулируется весь ее математический аппарат. Для того, чтобы ввести время в уравнения классической термодинамики, надо использовать другие исходные положения. С этой целью обратим внимание на опытный факт существования температуры. В термодинамике для определения понятия температуры обычно используется свойство транзитивности термодинамического равновесия. Данное эмпирическое положение для определенного идеального газа представляется в виде факта существования термического уравнения состояния $T = T(\nu, p)$, что подтверждается множеством опытных данных. Соответствующее уравнение имеет вид уравнения Клапейрона $T = p\nu/R_i$. При этом температурой T называют установленную опытным путем меру отклонения состояния изучаемой термодинамической системы от состояния теплового равновесия эталонного тела, которое находится в стандартизированных условиях. Соответствующее эталонное тело называется термометром. В зависимости от того, какое эталонное тело принимают в качестве термометра, различают разные шкалы эмпирических температур. При этом идеально-газовая шкала представляет собой частную форму измерительной температурной шкалы. Обобщение опытных данных термометрии привело к фундаментальному утверждению, что для любой физической системы всегда существует уравнение состояния в виде зависимости между температурой и остальными параметрами, характеризующими состояние этой системы.

Следующим опытным фактом является существование понятий количества теплоты и теплоемкостей. Количество теплоты (Q) – это физическая величина, характеризующая процесс теплообмена между термодинамической системой и

окружающей средой. Теплоемкость (c_l) вводится в физике в качестве особого рода величины, которая является одной из теплофизических характеристик вещества. Имеется множество методов определения теплоемкостей газов, твердых тел и жидкостей [Робертс, 1950]. Уравнение, определяющее в процессе l количество теплоты, необходимое для изменения температуры тела, представляют относительно температуры и теплоемкости тела в виде:

$$c_l = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_l. \tag{1}$$

Данное уравнение отражает особенности взаимодействия термодинамической системы с окружающей средой, причем эти особенности определяются как состоянием системы, так и направлением термодинамического процесса l при ее взаимодействии с окружающей средой. В математическом представлении теплоемкость является производной функции теплоты по функции температуры для выбранного направления l .

Таким образом, исходя из опытных данных, можно утверждать, что количество теплоты и температура связаны с давлением и удельным объемом идеального газа. Исходя из этого, состояние идеального газа и любой процесс изменения его состояния однозначно определяются этими параметрами при дополнительном условии, накладываемым уравнением состояния $T = T(\nu, p)$, которое, в свою очередь, описывает термодинамические свойства конкретного идеального газа.

Построим на плоскости геометрическую систему декартовых координат в виде пространства состояний идеального газа νOp , где координатные оси соответствуют независимым переменным ν и p . Предположим, что при совершении произвольного процесса l параметры состояния идеального газа могут быть представлены параметрическими уравнениями относительно времени τ : $\nu = \nu(\tau)$ и $p = p(\tau)$.

Так как между величинами Q и T в любом процессе существует связь вида (1), то будут справедливы соотношения:

$$\frac{\partial Q}{\partial \nu} = c_p \frac{\partial T}{\partial \nu} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = c_v \frac{\partial T}{\partial p}, \tag{2}$$

где c_p и c_v – теплоемкости идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Согласно уравнению Клапейрона, температура имеет вид однородной функции второй степени. Известно, что однородная функция второй степени, имеющая частные производные, удовлетворяет формуле Эйлера:

$$T = \frac{1}{2} \left(\nu \frac{\partial T}{\partial \nu} + p \frac{\partial T}{\partial p} \right). \tag{3}$$

Уравнение (3) с учетом соотношений (2) может быть представлено в виде линейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка для величины Q :

$$\frac{\nu}{2c_p} \frac{\partial Q}{\partial \nu} + \frac{p}{2c_v} \frac{\partial Q}{\partial p} = T. \tag{4}$$

Решение $Q = Q(\nu, p)$ для уравнения (4) геометрически представляет собой поверхность в трехмерном пространстве (ν, p, Q) , которая называется интегральной поверхностью. Для получения решения данного уравнения воспользуемся методом характеристик, которые определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений [Кошляков, 1970]:

$$2c_p \frac{d\nu}{\nu} = 2c_v \frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T} = ds, \tag{5}$$

где s – некоторый вещественный параметр. Если определить параметр s как длину дуги, изменяющуюся вдоль характеристической кривой [8], то уравнения (5) примут вид:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{v}{2c_p}; \quad \frac{dp}{ds} = \frac{p}{2c_v}; \quad \frac{dQ}{ds} = \frac{pv}{R_i} = T.$$

Из первых двух уравнений (5) сразу для величины ds получается зависимость, которая имеет вид известного термодинамического уравнения, используемого при определении энтропии идеального газа s :

$$ds = \frac{dQ}{T} = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}, \quad s - s_0 = c_p \ln \frac{v}{v_0} + c_v \ln \frac{p}{p_0}. \quad (6)$$

Таким образом, в геометрическом представлении энтропия является длиной дуги для характеристических кривых, соответствующих полю направлений, которое определяется системой уравнений (5). Из теории также известно [Кошляков, 1970], что интегральное решение $Q = Q(v, p)$ уравнения (4) можно покрыть семейством характеристик, причем любая характеристическая кривая, определяемая уравнениями (5) и имеющая общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности.

Интегральное решение уравнения (4) может быть найдено аналитическим путем. Задача Коши для данного уравнения связана с нахождением интегральной поверхности $Q = Q(v, p)$, проходящей через заданную кривую некоего процесса l , которая может быть представлена в параметрической форме относительно времени τ :

$$v_l = v_l(\tau), \quad p_l = p_l(\tau), \quad Q_l = Q_l(\tau). \quad (7)$$

Общее решение системы уравнений (5) относительно энтропии имеет вид:

$$v = v_l \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right); \quad p = p_l \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right); \quad Q = Q_l + c_p \beta_1 \frac{p_l v_l}{R_i} \left(\exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) - 1 \right), \quad (8)$$

где $\beta_1 = \frac{2c_v}{c_p + c_v}$. Для получения интегральной поверхности в трехмерном пространстве

(v, p, Q) параметрически задают кривую процесса l и исключают величины s и τ [Кошляков, 1970].

Предположим, что процесс l является изобарным, и линия процесса l , через которую должна проходить интегральная поверхность, задана параметрическими уравнениями относительно времени τ

$$v_l = v_1 + \alpha_v \tau; \quad p_l = p_1 = const; \quad Q = c_p T_l = c_p \frac{(v_1 + \alpha_v \tau) p_1}{R_i}, \quad (9)$$

где v_1, p_1 – термодинамические параметры газа в некоторой начальной точке при $\tau = 0$.

Подставив (9) в (8) получим

$$v = (v_1 + \alpha_v \tau) \exp\left(\frac{s}{2c_p}\right); \quad p = p_1 \exp\left(\frac{s}{2c_v}\right); \quad Q = c_p \frac{p_1 (v_1 + \alpha_v \tau)}{R_i} \left(\beta_2 + \beta_1 \exp\left(\frac{s}{c_p \beta_1}\right) \right),$$

где $\beta_2 = \frac{c_p - c_v}{c_p + c_v} = 1 - \beta_1$. Можно показать, что определитель $\Delta = v'_s p'_\tau - v'_\tau p'_s$ не

обращается в нуль при $s = 0$ и $\tau \neq 0$ [Кошляков, 1970]. Исключая величины s и τ , получим уравнение интегральной поверхности в виде

$$Q = c_p \frac{p\nu}{R_i} \left(\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-\frac{k+1}{k}} \right),$$

здесь $k = c_p/c_v$ – показатель адиабаты.

Аналогичные результаты можно получить численными методами, используя средства вычислительной математики. Следует заметить, что современные средства компьютерной математики позволяют в одной процедуре решить дифференциальное уравнение в частных производных и построить поверхность, геометрически представляющую данное решение и проходящую через конкретную линию процесса.

Предположим, что состояние водорода в начальный момент времени $\tau = 0$ имеет параметры – давление $p_1 = 101325 \text{ Па}$ и удельный объем $\nu_1 = 11,12720 \text{ м}^3/\text{кг}$. Пусть при расширении в изобарном термодинамическом процессе в течении 100 сек удельный объем увеличился до $\nu_2 = 15,2009 \text{ м}^3/\text{кг}$. При этом температура изменилась от $T_1 = 273,15 \text{ К}$ до $T_2 = 373,15 \text{ К}$. В данном изобарном процессе линия процесса l , через которую проходит интегральная поверхность, задается параметрическими уравнениями:

$$\nu = 11,127 + \alpha_\nu \tau; \quad p = 101325; \quad Q = c_p \frac{p(11,127 + \alpha_\nu \tau)}{R_i},$$

где значение теплоемкости c_p для водорода равно $14,3262 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.

Учитывая, что термодинамический процесс длится 100 сек , можно вычислить значение α_ν , которое для линейного процесса будет равно $\alpha_\nu = 0,04074 \text{ м}^3/(\text{кг}\cdot\text{сек})$:

Подставляя значение α_ν в формулу для объема и таким образом полностью определяя кривую процесса в параметрическом виде, построим интегральную поверхность $Q = Q(\nu, p)$, которая является решением уравнения (4). Для этого используем систему компьютерной математики Maple и, в частности, процедуру решения дифференциальных уравнений:

```
>p1 := 101325; t1 := 273.15; v1 := 11.12720; v2 := 15.2009; av := (v2-v1)*(1/100); R := 4157; cp := 14.326; cv := 10.080;
>PDEplot(p*(diff(Q(p, v), p))/cp+v*(diff(Q(p, v), v))/cv-2*p*v/R = 0, Q(p, v), [p1, av*t+v1, cp*p1*(av*t+v1)/R], t = 0 .. 100, color = p^2+2*v, style = PATCHCONTOUR).
```

Полученные расчетные результаты приведены на рисунке 1.

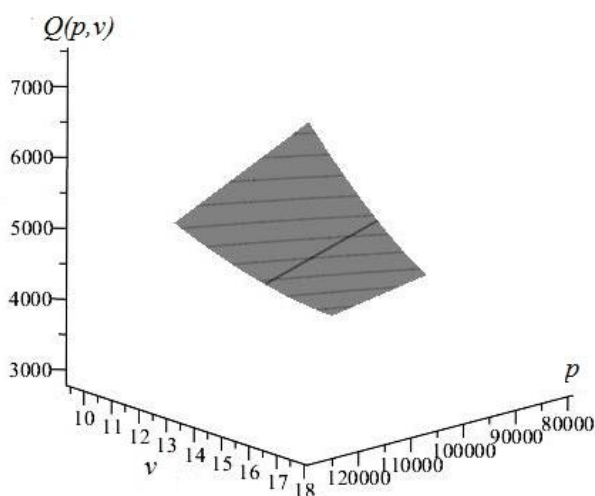


Рис. 1. Интегральная поверхность для количества теплоты при изобарном процессе расширения водорода

Fig. 1. Integrated surface for amount of heat at isobaric process of expansion of hydrogen

Таким образом, на основе решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка можно описать изменения во времени состояний идеального газа при осуществлении термодинамических процессов.

Геометрическая интерпретация термодинамических величин

Известно, что интегральные поверхности линейного уравнения вида (4) можно покрыть семейством характеристик, которые определяются из уравнений (5). Другими словами: через каждую точку интегральной поверхности проходит целиком лежащая в ней характеристика. Функции $f_1 = v/2c_p$, $f_2 = p/2c_v$ и $f_3 = T$ в уравнении (4) определяют некоторое поле направлений в пространстве (v, p, Q) , где в каждой точке этого пространства имеется направление, направляющие косинусы которого пропорциональны f_1, f_2, f_3 . Таким образом, уравнение (4) сводится к требованию, что в каждой точке интегральной поверхности вектор, определяемый указанным выше полем направлений, находится в касательной плоскости к этой поверхности [Кошляков, 1970].

Пусть процесс l в пространстве (v, p, Q) задан в параметрическом виде (7). Обозначим через l_0 проекцию кривой l на плоскость vOp . Тогда для уравнения (4) задача Коши формулируется в виде: в окрестности проекции l_0 найти интегральную поверхность, проходящую через заданную кривую l . Геометрическая интерпретация задачи Коши предполагает, что в пространстве (v, p, Q) через каждую точку процесса l надо провести характеристику уравнения (4) и «склеить» из них интегральную поверхность.

На плоскости vOp это выглядит следующим образом (рис. 2,а). Имеется проекция процесса l_0 с началом в точке $A_0(v_1, p_1)$ и концом в точке $B_0(v_2, p_2)$. Через точки A_0 и B_0 проходят характеристики 1, изотермы 2 и адиабаты 3. Семейство характеристик описывается уравнением $p = C_1 v^k$, исходя из первого интеграла системы (5), семейство изотерм – уравнением $p v = C_2$. В свою очередь, семейство адиабат характеризуется уравнением $p v^k = C_3$. Энтропия (6) в таком представлении будет являться длиной дуги характеристики, а адиабаты будут представлять собой в проекции линии уровня для характеристик при $s = const$. Адиабаты, изотермы и характеристики попарно формируют некоторую сеть криволинейных неортогональных координат на плоскости vOp .

Геометрическое решение задачи Коши в пространстве (v, p, Q) строится следующим образом. Через произвольную точку M_0 на плоскости vOp проводится характеристика до ее пересечения с процессом l_0 . После этого надо положить $Q = Q_i(\tau)$ с учетом известных параметрических уравнений для задания процесса l (рис. 2б).

Интегральная поверхность $Q = Q_i(v, p)$ будет характеризовать количество теплоты для множества состояний идеального газа в окрестности процесса l или его проекции l_0 .

В пространстве (v, p, Q) можно построить поверхность энергии $u = u(v, p)$ для состояний идеального газа, используя для этого уравнение $u = c_p T = c_p p v / R_i$. Тогда для любого процесса l изменение количества теплоты dl может быть представлено в дифференциальной форме в виде суммы двух функций $dQ = du + F(p, v)$. Данное соотношение будет иметь вид уравнения сохранения энергии, при этом возникает задача определения функции $F(p, v)$, которая может быть решена средствами вычислительной математики. Это позволит установить условия, при которых форма $dQ = du + F(p, v)$ может иметь известный вид уравнения сохранения энергии $dQ = du + p dv$.

Заклучение

Предложенный подход дает возможность провести геометрическую интерпретацию положений и соотношений термодинамики, так как задача Коши для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка имеет наглядное геометрическое изображение в многомерных пространствах состояний. Приведение термодинамических соотношений для количества теплоты к линейному неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка позволяет получить дополнительные зависимости между термодинамическими величинами и ввести время как параметр в уравнения классической термодинамики.

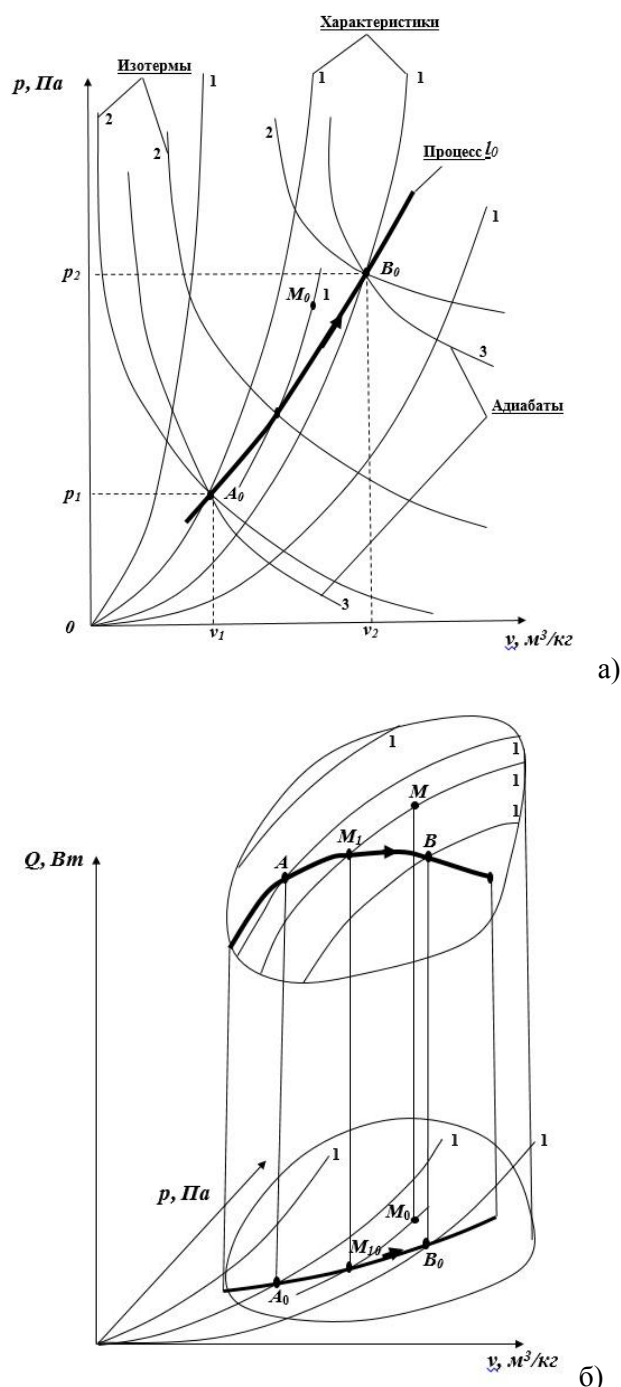


Рис. 2. Геометрическая интерпретация задачи Коши для уравнения (4):
 а – на плоскости νOp ; б – в пространстве (ν, p, Q)

Fig. 2. Geometric interpretation of Cauchy's problem for equation (4):
 а – on νOp plane; б – in (ν, p, Q) space

Также, исходя из метода характеристик, которые определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений для соответствующего уравнения в частных производных, можно дать математическое определение для энтропии и представить ее длиной дуги характеристики уравнения (4). При таком подходе время и энтропия будут описывать состояния и процессы изменения состояний идеального газа в параметрическом виде. Представление данных физических величин параметрами дает простую геометрическую интерпретацию основным положениям термодинамики.

В свою очередь, использование средств компьютерной математики позволяет установить закономерности осуществления термодинамических процессов и циклов при описании их функциями времени. При этом необратимость термодинамических процессов может быть связана с темпоральными особенностями этих процессов.

Список литературы

References

1. Аверин Г.В. 2014а. Системодинамика. Донецк: Донбасс, 405 с.
Averin G.V. 2014a. Sistemodinamika [Systemdynamics]. Doneck: Donbass, 405 p.
2. Афанасьева-Эренфест Т.А. 1928. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики. Журн. прикл. Физики. Т. 5, вып. 3–4: 3–28.
Afanas'eva-Jerenfest T.A. 1928. Neobratimost', odnostoronnost' i vtoroe nachalo termodinamiki [Irreversibility, unilaterality and second law of thermodynamics]. Zhurn. prikl. Fiziki. T. 5, Issue 3–4: 3–28.
3. Базаров И.П. 1991. Термодинамика. Изд. 4-е. М., Высшая школа, 376 с.
Bazarov I.P. 1991. Termodinamika [Thermodynamics]. Izd. 4-e. M., Vysshaya shkola, 376 p.
4. Борн М. 1964. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М., Наука: 223–256.
Born M. 1964. Kriticheskie zamechanija po povodu tradicionnogo izlozhenija termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [Critical remarks concerning a traditional statement of thermodynamics. In book: Development of modern physics]: Per. s nem. M., Nauka: 223–256.
5. Гухман А.А. 1986. Об основаниях термодинамики. М., Энергоатомиздат, 383 с.
Guhman A.A. 1986. Ob osnovanijah termodinamiki [About the thermodynamics bases]. M., Jenergoatomizdat, 383 p.
6. Звягинцева А.В., Аверин Г.В. 2016b. Интегрирование отдельных многомерных уравнений Пфаффа, имеющих важное прикладное значение. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. № 27 (248). Выпуск 45: 102–114.
Zvyagintseva A.V., Averin G.V. 2016b. Integrirovanie otdelnyih mnogomernyh uravnenij Pfaffa imeyuschih vajnoe prikladnoe znachenie [Integration of some multidimensional Pfaff equations of important applications] Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika. № 27 (248). Vyipusk 45: 102–114.
7. Каратеодори К. 1964. Об основаниях термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М., Наука: 188–222.
Karateodori K. 1964. Ob osnovah termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [About fundamentals of thermodynamics. In book: Development of modern physics] Per. s nem. M., Nauka: 188–222.
8. Кошляков И.С. 1970. Уравнения в частных производных математической физики. М., Вища школа, 712 с.
Koshlyakov I.S. 1970. Uravneniya v chastnyh proizvodnyih matematicheskoj fiziki [Partial Differential Equations of Mathematical Physics] M., Vischa shkola, 712 p. (in Russian)
9. Млодзеевский А.Б. 1956. Геометрическая термодинамика. М., Издательство МГУ, 94 с.
Mlodzeevskij A.B. 1956. Geometricheskaja termodinamika [Geometrical thermodynamics] M., Izdatelstvo MGU, 94 p.
10. Петров Н., Бранков Й. 1986. Современные проблемы термодинамики. М., Мир, 285 с.
Petrov N., Brankov J. 1986. Sovremennye problemy termodinamiki [Modern problems of thermodynamics] M., Mir, 285 p.
11. Пригожин И., Кондепуди Д. 2002. Современная термодинамика. Пер. с англ. М., Мир, 461 с.

Prigozhin I., Kondepudi D. 2002. *Sovremennaya termodinamika* [Modern thermodynamics]. Per. s angl. M., Mir, 461 p.

12. Робертс Д. 1950. *Теплота и термодинамика*. Пер. с англ. под ред. Вукаловича М.П. М., Издательство технико-теор. литературы, 592 с.

Roberts D. 1950. *Teplota i termodinamika* [Heat and Thermodynamics] Per. s angl. pod red. Vukalovicha M.P. M., Izdatelstvo tehniko-teor. literatury, 592 p.

13. Франкфурт У. 1964. К истории аксиоматики термодинамики. В кн.: Развитие совр. физики: Пер. с нем. М., Наука: 257–292.

Frankfurt U. 1964. K istorii aksiomatiki termodinamiki [In history of axiomatics of thermodynamics. In book: Development of modern physics] V kn.: Razvitie sovr. fiziki: Per. s nem. M., Nauka: 257–292.

14. Шевцова М.В., Аверин Г.В., Звягинцева А.В. 2016с. К вопросу обоснования положений термодинамики методами дифференциальной геометрии многомерных пространств. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика.* № 27 (248). Выпуск 45: 36–44.

Shevtsova M.V., Averin G.V., Zvyagintseva. 2016c. K voprosu obosnovaniya polozeniy termodinamiki metodami differentsialnoy geometrii mnogomernykh prostranstv [About justification of provisions of thermodynamics by methods of differential geometry of multidimensional spaces] *Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika.* № 27 (248). Vypusk 45: 36–44.

15. Звягинцева А.В., Аверин Г.В. 2016d. Интегрирование отдельных многомерных уравнений Пфаффа, имеющих важное прикладное значение. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика.* № 27 (248). Выпуск 45: 102–114.

Zvyagintseva A.V., Averin G.V. 2016d. Integrirovaniye otidel'nykh mnogomernykh uravneniy Pfaffa imeyushchih vazhnoye prikladnoye znachenie [Integration of some multidimensional Pfaff equations of important applications] *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika.* № 27 (248). Vypusk 45: 102–114.

16. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. 2016e. Probabilistic methods of a complex assessment of quantitative information. *Research Journal of Applied Sciences* 11 (7): 415–418.

17. Gyarmati I. 1962. On the Fundamentals of Thermodynamics. *Acta Chim. Hung.* 30: 147–206.

18. Landsberg P.T. 1970. Main Ideas in the Axiomatics of Thermodynamics. *Pure and Appl. Chem.* 22: 215–227.

19. Lieb E. H., Yngvason J. 1999. The physics and mathematics of the second law of thermodynamics. *Physics Reports.* Vol. 310. № 1. Elsevier: 1–96.

20. Falk G. and Jung H. 1959. *Axiomatik der Thermodynamik.* Hdb. Phys. III/2. Berlin: 119–175.

Ссылка для цитирования статьи

Reference to article

Аверин Г.В., Шевцова М.В. 2019. Дифференциальные уравнения для описания пространства состояний идеального газа. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.* 51 (2): 270–279. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-270-279.

Averin G.V., Shevtsova M.V. 2019. The differential equations for description the space of conditions of ideal gas. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics.* 51 (2): 270–279 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-270-279.