ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 004.031.4; 025.4.036
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-3-283-291

РАССЕЯНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕФЕКТОМ

THE LINEAR WAVE SCATTERING BY A NON-LINEAR DEFECT

С.Е. Савотченко
S.E. Savotchenko

Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова
Российская Федерация, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov
46 Kostukova St., 308012, Belgorod, Russian Federation

E-mail: savotchenkose@mail.ru

Аннотация
Рассмотрена задача рассеяния монохроматической световой волны, распространяющейся в линейной оптической среде на плоском ультратонком оптическом слое (волноводе) с нелинейным откликом. Математическая формулировка модели представляет собой одномерную краевую задачу для нелинейного уравнения Шредингера. Нелинейность в уравнении учитывается только внутри волновода. Подробно проанализирован случай нелинейности керровского типа. Также рассмотрен случай нелинейности произвольного вида, позволяющий получить результаты в общем виде. Показано, что возможно полное прохождения волны через плоский дефект. Определены условия реализации резонанса. Установлено, что полное прохождение волны при ненулевых параметрах дефекта может возникать только при учете нелинейных свойств дефекта.

Abstract
The scattering problem of a monochromatic light wave propagating in a linear optical medium on a plane ultrathin optical layer (waveguide) with a nonlinear response is considered. The mathematical formulation of the model reduces to a one-dimensional boundary-value problem for the nonlinear Schrödinger equation. The nonlinearity in the equation is taken into account only inside the waveguide. The case of Kerr nonlinearity is analyzed in detail. We also consider the case of nonlinearity of an arbitrary form, which makes it possible to obtain results in a general form. It is shown that it is possible to completely propagate the wave through a flat defect. The conditions of resonance realizing are determined. It is derived that complete wave propagation with nonzero defect parameters can occur only when the nonlinear properties of the defect are taken into account.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, задача рассеяния, коэффициент прохождения, коэффициент отражения, плоский дефект, граница раздела сред, волны.
Keywords: Schrödinger equation, scattering problem, transmission coefficient, reflection coefficient, planar defect, interface, waves.

Введение

Большое значение в теории нелинейных явлений в кристаллах играет изучение особенностей рассеяния волн и других возбуждений различными дефектами кристаллической структуры, в том числе границами раздела сред. Математическое моделирование таких процессов проводится с использованием нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными [1, 2].

В оптических слоистых средах плоскими дефектами можно считать очень узкие слои, показатели преломления света в которых существенно отличаются от показателей преломления в широких слоях [3]. Тогда такие границы раздела слоев играют роль волноводов.

Если показатель преломления зависит от квадрата амплитуды напряженности электрического поля, то такая среда считается керровской (в ней наблюдается эффект Керра) [4, 5]. Волны электромагнитной природы в керровской среде описываются нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [6]. Показатель преломления среды может зависеть от частоты волны и амплитуды напряженности электрического поля иным образом и тогда говорят, что соответствующая среда характеризуется некерровской нелинейностью [7, 8, 9].

Рассеяние нелинейных волн плоскими дефектами рассматривалось достаточно детально [10, 11]. Также изучены особенности взаимодействия линейных волн с дефектами, характеризующимися собственной внутренней структурой, способной влиять на волноводные свойства границ раздела сред, рассеяния и локализации [12–15]. Различные особенности динамики одномерных дискретных систем с взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике рассматривались в работах [16–22]. Локализация на границе раздела линейной и нелинейной сред с учетом конечной интенсивности взаимодействия возбуждения с плоским дефектом описана в [23]. В [25–27] анализировались особенности взаимодействия вблизи дефекта связанных солитонных состояний, относящихся различным состояниям системы в двухуровневой системе.

В последнее время возник интерес к рассмотрению таких дефектов, которые характеризуются дополнительным нелинейным откликом [28–34]. В [29] рассматривался случай, когда нелинейные свойства среды учитывалась только внутри тонкого слоя, играющего роль нелинейного волновода. Были описаны возможные локализованные состояния, возникающие в оптически линейной среде вблизи нелинейного волновода.

В данной работе предлагается теоретическое описание новых особенностей рассеяния линейных волн нелинейным дефектом. Использование локального потенциала в короткодействующем приближении, который характеризуется одним параметром, не в полной мере позволяет анализировать взаимодействие, обусловленное физическими свойствами дефекта, с локальными возмущениями параметров среды, образующимися вблизи него [12–15].

Для описания новых особенностей рассеяния возбуждений в слоистых структурах, учитывающих нелинейные свойства границ раздела слоев, в данной работе предлагается использовать нелинейный потенциал с квадратичной нелинейностью относительно искомого поля, который применялся в [28–34]. При наличии слабой связи между плоскопараллельными волноводами, амплитуда поля в которых существенно превышает усредненное значение амплитуды поля во всем кристалле, нелинейные слагаемые в УШ учитывались в внутри самих волноводов [28, 29].

1. Уравнения модели

Будем рассматривать кристалл, внутри которого находится плоский дефект в плоскости yz, проходящий через начало координат перпендикулярно оси x.

Предполагается, что возмущение параметров среды, создаваемое плоским дефектом, может считаться локальным, поскольку оно сосредоточено на расстояниях, которые намного меньше характерных размеров рассматриваемых возбуждений.

Рассмотрим процессы распространения возбуждений вблизи поверхности на основе НУШ:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x,|\psi|^2)\psi\,, \tag{1}$$

где $U(x,|\psi|^2)$ – потенциал, описывающий характер взаимодействия возбуждений плоским дефектом. Если считать, что тонкая прослойка, рассматриваема как плоский дефект, обладает нелинейностью керровского типа, то его нелинейные свойства будем описывать одномерным потенциалом в виде [28–34]:

$$U(x,|\psi|^2) = \{U_0 + W_0|\psi|^2\}\delta(x)\,, \tag{2}$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака, U_0 – интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом, расположенным в начале координат (иногда данная величина называется «мощностью» дефекта). При $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ – притягивается. W_0 – параметр нелинейности дефекта, положительное значение которого соответствует дефокусировке, а отрицательное – самофокусировке в тонком дефектном слое.

Уравнение (1) потенциалом в виде (2) моделирует динамику светового поля вблизи тонкого плоского волновода. Нелинейность оптической среды учитывается только внутри волновода [29].

Будем рассматривать только стационарные состояния с энергией E, определяемые из стационарного УШ, получаемого из (1) после подстановки в него волновой функции в виде

$$\psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt)\,.$$

Стационарное УШ принимает вид:

$$\psi'' + \{k^2 + U_0 + W_0|\psi|^2\}\delta(x)\psi = 0\,, \tag{3}$$

где $k^2=2E$.

Уравнение (3) с двумя параметрами U_0 и W_0 использовалось при формулировке модели оптической системы, в которой периодическая модуляция линейного показателя преломления сочетается с пространственно-неоднородной нелинейностью, представленной периодической решеткой Кронига-Пенни с одиночным нелинейным дефектом – тонкослойным нелинейным волноводом [28].

Решение УШ (3) с потенциалом эквивалентно нахождению решения контактной краевой задачи для УШ без потенциала:

$$\psi'' + k^2\psi = 0\,, \tag{4}$$

с двумя граничными условиями сопряжения в точке x=0, через которую проходит плоскость дефекта. Непрерывность волновой функции определяет первое (стандартное) граничное условие:

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi_0\,, \tag{5}$$

где ψ_0 – амплитуда колебаний поля в плоскости дефекта.

Если проинтегрировать обе части уравнения (3) по x на малом интервале $[-\varepsilon; \varepsilon]$ и устремить затем ε к нулю, то в результате можно получить второе граничное условие [29]:

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2\psi_0\{U_0 + W_0|\psi_0|^2\}\,. \tag{6}$$

Таким образом, математическая формулировка нахождения стационарных колебательных состояний в рамках предложенной модели сводится к решению краевой задачи на полуоси для УШ (4) с граничными условиями (5, 6).

2. Рассеяние линейных волн дефектом с керровской нелинейностью

При E>0 будем искать решение УШ в постановке задачи рассеяния [35]:

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{ikx}+re^{-ikx}, & x<0 \\ \psi_0 e^{ikx}, & x>0 \end{cases} \tag{7}$$

где амплитуда r связана с коэффициентом отражения:

$$R=|r|^2, \tag{8}$$

амплитуда колебаний поля в плоскости дефекта ψ_0 связана с коэффициентом прохождения:

$$T=|\psi_0|^2. \tag{9}$$

Для упругого рассеяния коэффициенты отражения и прохождения связаны известным условием:

$$R + T = 1.$$

Подстановка решения (7) в граничные условия (5) и (6) приводит к системе алгебраических уравнения для амплитуд рассеяния:

$$\psi_0 = 1 + r, \tag{10}$$

$$ik(\psi_0 - 1) = \{U_0 + W_0|\psi_0|^2\}. \tag{11}$$

Видно, что данная система имеет решение

$$\psi_0=1,\ r=0$$

при условии

$$|\psi_0|^2 = -U_0/W_0.$$

Из этого условия следует, что параметры дефекта должны быть связаны: $U_0 = -W_0$.

Такое решение при указанном условии описывает полное отражение, когда

$$T = 1,\ R = 0.$$

Данные условия соответствуют непрерывности производных поля ψ в плоскости дефекта.

Однако, в случае дефекта без нелинейного отклика, когда $W_0=0$, такое полное прохождения при ненулевой мощности дефекта U_0 а, следовательно, и при ненулевой энергии, невозможно. Поэтому, полное прохождение волны при ненулевых параметрах дефекта может возникать только при учете нелинейных свойств дефекта.

В окрестности резонанса из (10) и (11) при условии R << 1 можно получит оценку коэффициентов отражения и прохождения соответственно:

$$R=\frac{(U_0+W_0)^2}{k^2+(U_0+3W_0)^2}. \tag{12}$$

$$T=1-\frac{(U_0+W_0)^2}{k^2+(U_0+3W_0)^2}. \tag{13}$$

В случае плоского дефекта без нелинейного отклика, когда $W_0=0$, из (12) получается хорошо известный коэффициент отражения в задаче рассеяния для УШ с короткодействующим дельта-функционным потенциалом [35]:

$$R = \frac{U_0^2}{k^2 + U_0^2}, \tag{14}$$

для которого полное прохождение возможно только при $U_0=0$.

3. Рассеяние линейных волн дефектом с произвольной нелинейностью

Рассмотрим теперь случай, когда внутри волновода нелинейность является произвольной. Тогда потенциал (2) примет вид:

$$U(x, |\psi|^2) = \{U_0 + W_0 f(|\psi|^2)\}\delta(x), \tag{15}$$

где функция $f(|\psi|^2)$ определяет вид зависимости от интенсивности поля. Очевидно, что она должна быть непрерывной и ограниченной в окрестности плоскости дефекта. Из физических соображений она должны быть положительной при положительном значении аргумента.

Для оптической среды с керровской нелинейностью $f(|\psi|^2) = |\psi|^2$ и (15) переходит в (6). Можно привести другие физические примеры конкретного вида функции $f(|\psi|^2)$. В частности, для фоторефрактивного кристалла в результате действия диффузного механизма нелинейности добавка к показателю преломления приводит к функции вида:

$$f(|\psi|^2) \propto \frac{I'(x)}{I(x) + I_d},$$

где $I(x) \propto |\psi_0|^2$ – интенсивность светового потока, I_d – темновая интенсивность [7].

Диэлектрическая функция нелинейной среды, зависящая от частоты и амплитуды электрического поля распространяющейся волны в полупроводнике с экситон-фотонным взаимодействием и оптической экситон-биэкситонной конверсии, приводит к функции вида [8]:

$$f(|\psi|^2) \propto 1 - \frac{aI_0^2}{(I_0 - I(x))^2},$$

где I_0 – интенсивность, определяемая расстройкой резонанса для частоты распространяющейся волны относительно частоты экситонного перехода, a – константа пропорциональности, определяемая константами оптической экситон-биэкситонной конверсии и экситон-фотонного взаимодействия, а также частотой расщепления экситонного состояния.

Диэлектрическая функция нелинейной оптической среды с эффектом насыщения, предложенная в [9] приводит к функции вида:

$$f(|\psi|^2) \propto \operatorname{th}|\psi|^2.$$

Для потенциала (15) граничное условие (6) примет вид:

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2\psi_0\{U_0 + W_0 f(|\psi_0|^2)\}. \tag{16}$$

Подстановка (7) в (16) приводит к уравнению:

$$ik(\psi_0 - 1) = \{U_0 + W_0 f(|\psi_0|^2)\}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что полное прохождение T=1 возможно при выполнении резонансного условия

$$f(|\psi_0|^2) = -U_0 / W_0.$$

Но так как $\psi_0=1$, то отсюда следует, что функция f должна быть связана с параметрами дефекта условием $f(1) = -U_0 / W_0$.

Если, к примеру, выбрать нелинейность волновода в самом простом виде, удовлетворяющем данному требованию:

$$f(|\psi|^2) \propto \operatorname{arctg}|\psi|^2,$$

то резонансное условие реализации полного прохождения примет вид линейной связи параметров дефекта: $U_0 = -W_0(1+4n)\pi/4$, n=0,1,2…

Заключение

На основе одномерной модели нелинейного плоского дефекта рассмотрена задача рассеяния линейных волн. Математическая формулировка модели представляет собой краевую задачу для стационарного УШ с нелинейным граничным условием.

Проанализировано взаимодействие светового поля в линейной оптической среде с одним плоским волноводом, представляющим собой тонкую оптически прозрачную прослойку из нелинейной среды, который интерпретируется как плоский дефект. Нелинейность внутри волновода рассматривалась как керровского типа, так и произвольно модулируемого. Приведены примеры физических случаев различных функции нелинейности.

Для всех случаев нелинейности показана возможность полного прохождения волны через плоский дефект и указаны условия реализации резонанса. Показано, что в случае дефекта без нелинейного отклика полное прохождения при ненулевой мощности дефекта U_0 а, значит, и при ненулевой энергии, невозможно. На основании этого утверждается, что полное прохождение волны при ненулевых параметрах дефекта может возникать только при учете нелинейных свойств дефекта.

Получены оценки коэффициентов отражения и прохождения соответственно в окрестности резонанса. Из данных выражений вытекает хорошо известный коэффициент отражения линейной волны от дельта-функционного потенциала для случая плоского дефекта без нелинейного отклика.

Список литературы
References

1. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984, 288.

Davydov A.S. Solitony v molekuljarnyh sistemah. Kiev: Naukova dumka, 1984, 288.

2. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989, 304.

Kosevich A.M., Kovalev A.S. Vvedenie v nelinejnuju fizicheskuju mehaniku. Kiev: Naukova dumka, 1989, 304.

3. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2000. Локализация нелинейных волн в слоистых средах. Физика низких температур, 26, 8: 799–809.

Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2000. Lokalizacija nelinejnyh voln v sloistyh sredah. Fizika nizkih temperature. 26, 8: 799–809.

4. Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И., Кузьменко Ю.В. 1985. Возбуждение нелинейных поверхностных волн гауссовыми световыми пучками. ЖЭТФ, 88, 1: 107–115.

Ahmediev N.N., Korneev V.I., Kuz'menko Ju.V. 1985. Vozbuzhdenie nelinejnyh poverhnostnyh voln gaussovymi svetovymi puchkami. ZhJeTF, 88, 1: 107–115

5. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. 1989. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 20, 1: 198–253.

Mihalake D., Nazmitdinov R.G., Fedjanin V.K. 1989. Nelinejnye opticheskie volny v sloistyh strukturah. Fizika jelementarnyh chastic i atomnogo jadra, 20, 1: 198–253.

6. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2003. Локализация нелинейных волн между интерфейсами. Физика твердого тела, 45, 6: 1088–1090.

Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2003. Lokalizacija nelinejnyh voln v sloistyh sredah Fizika tverdogo tela. 45, 6: 1088–1090.

7. Усиевич Б.А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А., Ивлева Л.И., Лыков П.А., Богодаев Н.В. 2010. Нелинейные поверхностные волны на границе фоторефрактивного кристалла. Квантовая электроника, 40, 5: 437–440.

Usievich B.A., Nurligareev D.H., Sychugov V.A., Ivleva L.I., Lykov P.A., Bogodaev N.V. 2010. Nelinejnye poverhnostnye volny na granice fotorefraktivnogo kristalla. Kvantovaja jelektronika, 40, 5: 437–440.

8. Коровай О.В., Хаджи П.И. 2010. Нелинейные ТЕ-поляризованные квазиповерхностные волны в симметричном световоде с нелинейной сердцевиной. Физика твердого тела, 52, 11: 2277–2282.

Korovaj O.V., Hadzhi P.I. 2010. Nelinejnye TE-poljarizovannye kvazipoverhnostnye volny v simmetrichnom svetovode s nelinejnoj serdcevinoj. Fizika tverdogo tela, 52, 11: 2277–2282.

9. Федоров Л.В., Ляхомская К.Д. 1997. Нелинейные волны при учете эффекта насыщения. Письма в ЖТФ, 23, 23: 36–39.

Fedorov L.V., Ljahomskaja K.D. 1997. Nelinejnye volny pri uchete jeffekta nasyshhenija. Pis'ma v ZhTF, 23, 23: 36–39.

10. Кившарь Ю.С., Косевич А.М., Чубыкало О.А. 1987. Рассеяние на точечном дефекте связанных квазичастиц как солитонная проблема (одномерный случай). ЖЭТФ, 93, 3(9): 968–977.

Kivshar' Ju.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. 1987. Rassejanie na tochechnom defekte svjazannyh kvazichastic kak solitonnaja problema (odnomernyj sluchaj, ZhJeTF. 93, 3(9): 968–977.

11. Kivshar Yu.S., Kosevich A.M. 1990. Chubykalo O.A. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces. Phys. Rev. A., 41, 3: 1677–1688.

12. Савотченко С.Е. 2016. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 4: 51–59.

Savotchenko S.E. 2016. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh vozbuzhdenij vblizi defekta s vnutrennej strukturoj. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika, 4: 51–59.

13. Савотченко С.Е. 2017. Локализованные состояния в дефокусирующей нелинейной среде с дефектом с внутренней структурой. Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика, 20(269), 48: 79–85.

Savotchenko S.E. 2017. Lokalizovannye sostojanija v defokusirujushhej nelinejnoj srede s defektom s vnutrennej strukturoj. Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika, 20(269), 48: 79–85.

14. Савотченко С.Е. 2018. Локализация возбуждений вблизи тонкой прослойки с внутренней структурой между линейным и нелинейным кристаллами. ЖЭТФ, 153: 339–348.

Savotchenko S.E. 2018. Lokalizacija vozbuzhdenij vblizi tonkoj proslojki s vnutrennej strukturoj mezhdu linejnym i nelinejnym kristallami. ZhJeTF, 153: 339–348.

15. Savotchenko S.E. 2018. Localized states near the interface with an internal structure between nonlinear attractive and repulsive media. Journal of Applied Surfaces and Interfaces, 3, 1-3: 22–27.

16. Савотченко С.Е. 2004. Локализация волн вблизи интерфейса нелинейных сред с пространственной дисперсией. Известия высших учебных заведений. Физика, 47, 5: 79–84.

Savotchenko S.E. 2004. Lokalizacija voln vblizi interfejsa nelinejnyh sred s prostranstvennoj dispersiej. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 47, 5: 79–84.

17. Косевич А.М., Савотченко С.Е. 1999. Особенности динамики одномерных дискретных систем с взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике. ФНТ, 25, 7: 737–747.

Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 1999. Osobennosti dinamiki odnomernyh diskretnyh sistem s vzaimodejstviem ne tol'ko blizhajshih sosedej i rol' vysshej dispersii v solitonnoj dinamike. FNT, 25, 7: 737–747.

18. Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 2000.Forced vibrations and resonance wave scattering on impurity in 1D discrete lattice with nearest- and next-nearest neighbors interaction. Physica B, 284–288: 1551–1552.

19. Савотченко С.Е. 2000. Рассеяние волн дефектами в средах с пространственной дисперсией и безызлучательные динамические солитоны. Известия высших учебных заведений. Физика, 43, 10: 876–881.

Savotchenko S.E. 2000. Rassejanie voln defektami v sredah s prostranstvennoj dispersiej i bezyzluchatel'nye dinamicheskie solitony. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 43, 10: 876–881.

20. Krasilnikov V.V., Savotchenko S.E. 2004. Peculiarities of soliton motion in molecular systems with high dispersion. Phys. Stat. Sol. (c), 1, 11: 2757–2760.

21. Савотченко С.Е. 2005. Нелинейные коллективные возбуждения в квазиодномерных структурах при наличии пространственной дисперсии. Известия вузов. Физика, 48, 9: 24–27.

Savotchenko S.E. 2005. Nelinejnye kollektivnye vozbuzhdenija v kvaziodnomernyh strukturah pri nalichii prostranstvennoj dispersii. Izvestija vuzov. Fizika, 48, 9: 24–27.

22. Савотченко С.Е. 2006. Особенности нелинейной динамики квазичастиц в молекулярных структурах с водородными связями при наличии взаимодействия не только ближайших соседей. Известия вузов. Физика, 49, 2: 52–56.

Savotchenko S.E. 2006. Osobennosti nelinejnoj dinamiki kvazichastic v molekuljarnyh strukturah s vodorodnymi svjazjami pri nalichii vzaimodejstvija ne tol'ko blizhajshih sosedej. Izvestija vuzov. Fizika, 49, 2: 52–56.

23. Савотченко С.Е. 2017. Локализованные состояния на границе линейной и нелинейной сред. Конденсированные среды и межфазные границы, 19: 567–572.

Savotchenko S.E. 2017. Lokalizovannye sostojanija na granice linejnoj i nelinejnoj sred. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 19: 567–572.

24. Савотченко С.Е. 2017. Взаимодействие локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред. Конденсированные среды и межфазные границы, 19: 291–295.

Savotchenko, S.E. 2017. Vzaimodejstvie lokalizovannyh sostojanij vblizi granicy razdela nelinejnyh sred. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 2: 291–295.

25. Савотченко С.Е. 2017. Связанные солитонные состояния и локализация кноидальных волн на границе раздела нелинейной и линейной сред. ЖТФ, 62: 1776–1781.

Savotchenko S.E. 2017. Svjazannye solitonnye sostojanija i lokalizacija knoidal'nyh voln na granice razdela nelinejnoj i linejnoj sred. ZhTF, 62: 1776–1781.

26. Savotchenko S.E. 2018. The coupled states localized near the interface between nonlinear attractive and repulsive media. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 63, 10: 171–185.

27. Savotchenko S.E. 2018. Interaction of the localized states near nonlinear repulsive media border. Modern Physics Letters B, 32, 19: 1850222–13.

28. Sukhorukov A.A. and Kivshar Yu.S. 2001. Nonlinear Localized Waves in a Periodic Medium, Phys. Rev. Lett. 87: 083901

29. Gerasimchuk I.V. 2012. Localized States Near a Nonlinear Optical Waveguide. Journal of nano- and electronic phys. 4, 4: 04024(4).

30. Герасимчук И.В. 2015. Локализованные состояния и их устойчивость в ангармонической среде с нелинейным дефектом. ЖЭТФ, 121, 4: 596–605.

Gerasimchuk I.V. 2015. Lokalizovannye sostojanija i ih ustojchivost' v angarmonicheskoj srede s nelinejnym defektom. ZhJeTF, 121, 4: 596–605.

31. Savotchenko S.E. 2018. Localized states near the interface with anharmonic properties between nonlinear media with different characteristics. Modern Physics Letters B. 32, 10: 1850120-12.

32. Савотченко С.Е. 2018. Особенности локализации возбуждений вблизи нелинейного слоя между линейными средами, разделенными плоскими дефектами с нелинейными свойствами. Нелинейный мир, 3: 25–32.

Savotchenko S.E. 2018. Osobennosti lokalizacii vozbuzhdenij vblizi nelinejnogo sloja mezhdu linejnymi sredami, razdelennymi ploskimi defektami s nelinejnymi svojstvami. Nelinejnyj mir, 3: 25–32.

33. Савотченко С.Е. 2018. Периодические состояния вблизи плоского дефекта с нелинейным откликом, разделяющего нелинейный самофокусирующий и линейный кристаллы. Конденсированные среды и межфазные границы, 20, 2: 255–262.

Savotchenko S.E. 2018. Periodicheskie sostojanija vblizi ploskogo defekta s nelinejnym otklikom, razdeljajushhego nelinejnyj samofokusirujushhij i linejnyj kristally. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 20, 2: 255–262.

34. Савотченко С.Е. 2018. Неоднородные состояния в нелинейной самофокусирующей среде, порождаемые нелинейным дефектом. Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики, 107, 8: 481–483.

Savotchenko S.E. 2018. Neodnorodnye sostojanija v nelinejnoj samofokusirujushhej srede, porozhdaemye nelinejnym defektom. Pis'ma v zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki, 107, 8: 481–483.

35. Lipkin H.J. 1973. Quantum Mechanics. New Approaches To Selected Topics, Hoth-Holland Publ. Co., Amsterdam, 480.