УДК 511.3
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-3-265-282

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ В ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

NUMBER OF SOLUTIONS OF SOME DIOFANTINE INEQUALITIES IN SPECIAL PRIMES

А.П. Науменко
A.P. Naumenko

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1

Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

Email: naumenko.anton90@gmail.com

Аннотация
Пусть P_0 – множество простых чисел p, удовлетворяющих условию $0 \le \{0.5\sqrt{p}\} < 0.5$. Числа множества P_0 будем также называть *«специальными»* простыми. В настоящей работе доказано существование бесконечного количества пар *«специальных»* простых p_1, p_2 таких, что $|p_1 - p_2| < C$, где $C = 478830$. При доказательстве мы использовали метод решета Сельберга и его многомерный вариант (решето Голдстона, Пинтца, Йелдрима, GPY-решето), теорему Бомбьери-Виноградова и ее аналог для *«специальных»* простых чисел.

Abstract
The question of whether there exist infinitely many twin primes has been one of the great open questions in number theory for many years. This is the content of the twin prime conjecture (non proof), which states that there are infinitely many primes p such that $p+2$ is also prime. In their celebrated paper Goldston, Pintz and Yildirim introduced a new method for counting tuples of primes, and this allowed them to show that $\underline{\lim}_n \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0$. In 2011 the recent breakthrough of Zhang managed to extend this work to prove $\underline{\lim}_n (p_{n+1} - p_n) \le 7 \cdot 10^7$ thereby establishing for the first time the existence of infinitely many bounded gaps between primes. Later James Maynard has succeeded in reducing the Zhang's bound to 600. The recent polymath project has succeeded in reducing the bound to 246, by optimizing Zhang's arguments and introducing several new refinements. Let P_0 is the set of primes p satisfies $0 \le \{\sqrt{p}\} \le 0.5$. We introduce a refinement of the GPY sieve method for studying small gaps between *«special»* primes. This refinement avoids previous limitations of the method, and allows us to show that $\underline{\lim}_n (p_{n+1} - p_n) \le 478830$.

Ключевые слова: промежутки между простыми числами, решето Сельберга.
Key words: gaps between primes, Selberg sieve.

1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть P_0 – множество простых чисел p, удовлетворяющих условию $\{0.5\sqrt{p}\} \le 0.5$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Существует бесконечно много пар простых чисел* $p_1, p_2 \in P_0$ *таких, что*

$|p_1 - p_2| \le 478830$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие определения и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор неотрицательных целых чисел $h_1, h_2, \dots, h_k$ назовем *«допустимым»*, если для любого простого числа $p \ge 2$ существует такой остаток r_p от деления на p, что $r_p \ne h_i (\operatorname{mod} p_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Обозначим $W = \prod_{p \le D_0} p$, где $D_0 = \log\log\log N$.

Для любого *«допустимого»* множества $h_1, h_2, \dots, h_k$, пользуясь китайской теоремой об остатках, можем найти остаток υ_0 (вообще говоря, не один) такой, что $\upsilon_0 + h_i$ взаимно просты с W для всех i. Везде далее мы будем рассматривать только числа n, лежащие в фиксированном классе вычетов $\upsilon_0 (\operatorname{mod} W)$, то есть взаимно простые с W.

Определим далее две суммы

$$S_1 = \sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \upsilon_0 (\operatorname{mod} W) \\ \{0.5\sqrt{n}\} \le 0.5}} \left(\sum_{d_i | n + h_i \forall i} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \right)^2. \tag{1}$$

$$S_2 = \sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \upsilon_0 (\operatorname{mod} W) \\ \{0.5\sqrt{n}\} \le 0.5}} \left(\sum_{i=1}^{k} \chi_{\mathrm{P}}(n + h_i) \right) \left(\sum_{d_i | n + h_i \forall i} \lambda_{d_1, \dots, d_k} \right)^2. \tag{2}$$

Здесь $\chi_{\mathrm{P}}(n) = 1$, если n – *«специальное»* простое число и 0 в противном случае.

Мы будем использовать аналог теоремы Бомбьери-Виноградова для «специальных» простых чисел.

ТЕОРЕМА 2. *(см. [1]) Справедлив усредненный асимптотический закон распределения «специальных» простых чисел в прогрессии*:

$$\sum_{d \le x^{\theta - \varepsilon}} \left| \pi^*(x, d, l) - \frac{Li(x)}{2\varphi(d)} \right| < x (\ln x)^{-c},$$

где $\pi^*(x, d, l) = \sum_{n \equiv l (\operatorname{mod} d)} \chi_{\mathrm{P}}(n)$, $\theta = 1/3$.

Пусть $\theta -$ константа из теоремы 2.

Определим

$$R = N^{\theta/2 - \delta}$$

для некоторой достаточно малой и фиксированной константы $\delta > 0$.

Пусть $F -$кусочно-дифференцируемая функция (которую мы выберем позднее), отличная от *0* только на множестве

$$\mathfrak{R}_k = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in [0,1]^k : \sum_{i=1}^{k} x_i \le 1 \right\}.$$

Тогда определим коэффициенты Сельберга $\lambda_{d_1,\ldots,d_k}$ следующим образом:

$$\lambda_{d_1,\ldots,d_k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu(d_i) d_i \right) \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ d_i | r_i \, \forall i \\ (r_i, W)=1 \forall i}} \frac{\mu\left(\prod_{i=1}^{k} r_i\right)^2}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(r_i)} F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log r_k}{\log R} \right)$$

в случае $\left(\prod_{i=1}^{k} d_i, W \right) = 1$ и $\lambda_{d_1,\ldots,d_k} = 0$ в противном случае.

2. Леммы

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$y_{r_1,\ldots,r_k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i) \varphi(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ r_i | d_i \forall i}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k} d_i}.$$

Пусть далее $y_{\max} = \max_{r_1,\ldots,r_k} \left| y_{r_1,\ldots,r_k} \right|$.

Тогда

$$S_1 = \frac{N}{2W} \sum_{r_1,\ldots,r_k} \frac{y_{r_1,\ldots,r_k}^2}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(r_i)} + O\left(\frac{y_{\max}^2 N (\log R)^k}{W D_o} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Раскроем скобки и поменяем порядок суммирования.

Тогда получим

$$S_1 = \sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \upsilon_0 (\mathrm{mod} W) \\ \{0.5\sqrt{n}\} \le 0.5}} \left(\sum_{d_i | n + h_i \forall i} \lambda_{d_1,\ldots,d_k} \right)^2 = \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}} \lambda_{d_1,\ldots,d_k} \lambda_{e_1,\ldots,e_k} \sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \upsilon_0 (\mathrm{mod} W) \\ [d_i, e_i] | n + h_i \forall i \\ \{0.5\sqrt{n}\} \le 0.5}} 1.$$

Рассмотрим внутреннюю сумму.

Из определения коэффициентов λ следует, что суммирование во внешней сумме идет по числам $d_1,\ldots,d_k, e_1,\ldots,e_k$ таким, что $(d_i, d_j)=1, (e_i, e_j)=1, (d_i, e_j)=1$ для любой пары индексов i, j при $i \ne j$.

Кроме того, при любом $1 \le i \le k$ выполнены условия $(d_i, W)=1, (e_i, W)=1$.

Но тогда, очевидно, числа $W, [d_1, e_1], [d_2, e_2], \ldots, [d_k, e_k]$ являются попарно взаимно простыми.

Таким образом, приходим к равенству:

$$\sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \upsilon_0 (\mathrm{mod} W) \\ [d_i, e_i] | n + h_i \forall i \\ \{0.5\sqrt{n}\} \le 0.5}} 1 = \frac{N}{2W[d_1, e_1][d_2, e_2]\ldots[d_k, e_k]} + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Тогда для S_1 получаем

$$S_1 = \frac{N}{2W} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}}{}^{\prime} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k}[d_i,e_i]} + O\left(\sqrt{N} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}}{}^{\prime} \left|\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}\right|\right),$$

где $\sum{}^{\prime}$ означает, что суммирование ведется по $d_1,\ldots,d_k,e_1,\ldots,e_k$, для которых числа $W,[d_1,e_1],[d_2,e_2],\ldots,[d_k,e_k]$ являются попарно взаимно простыми.

Рассмотрим остаточный член.

Обозначим максимальное значение коэффициентов λ через $\lambda_{\max}$, то есть

$$\lambda_{\max} = \max_{d_1,\ldots,d_k} \lambda_{d_1,\ldots,d_k}.$$

Заметим, что если $d_1 d_2 \cdots d_k > R$, то значение $\lambda_{d_1,\ldots,d_k} = 0$.

Следовательно, справедлива оценка:

$$\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}}{}^{\prime} \left|\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}\right| \le \lambda_{\max}^2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \cdots d_k < R \\ e_1 e_2 \cdots e_k < R}} 1 = \lambda_{\max}^2 \left(\sum_{d<R} \tau_k(d)\right)^2 << \lambda_{\max}^2 R^2 (\log R)^{2k}.$$

Далее сосредоточимся на преобразованиях главного члена.

Воспользуемся известным тождеством:

$$\frac{1}{[d_i,e_i]} = \frac{1}{d_i e_i} \sum_{u_i|(d_i,e_i)} \varphi(u_i).$$

Получаем

$$\frac{N}{W} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k}}{}^{\prime} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod\limits_{i=1}^{k}[d_i,e_i]} = \frac{N}{W} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \left(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ u_i|(d_i,e_i)\forall i}}{}^{\prime} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{(\prod_{i=1}^{k} d_i)(\prod_{i=1}^{k} e_i)}.$$

Напомним, что суммирование во внутренней сумме идет по числам $d_1,\ldots,d_k,e_1,\ldots,e_k$ таким, что $(d_i,e_j)=1$ для любой пары индексов i,j при $i \ne j$. Условие $(d_i,e_j)=1$ мы можем записать, воспользовавшись тождеством для функции Мебиуса:

$$\sum_{s_{i,j}|(d_i,e_j)} \mu(s_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (d_i,e_j)=1, \\ 0, & \text{если } (d_i,e_j)>1. \end{cases}$$

Тогда получаем

$$\frac{N}{W} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \left(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ u_i|(d_i,e_i)\forall i}}{}^{\prime} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\left(\prod_{i=1}^{k} d_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} e_i\right)} =$$

$$= \frac{N}{W} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \left(\prod_{i=1}^{k} \varphi(u_i)\right) \sum_{s_{1,2},\ldots,s_{k,k-1}} \left(\prod_{\substack{1\le i,j\le k \\ i\ne j}} \mu(s_{i,j})\right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ u_i|d_i,e_i\forall i \\ s_{i,j}|d_i,e_j\forall i\ne j}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}\lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\left(\prod_{i=1}^{k} d_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} e_i\right)}.$$

Заметим, что при суммировании по $s_{i,j}$ мы можем ограничиться только слагаемыми, соответствующими случаю $(s_{i,j},u_i)=1, (s_{i,j},u_j)=1$ при любых $i \ne j$. В противном случае коэффициенты $\lambda_{d_1,\dots,d_k}$ или $\lambda_{e_1,\dots,e_k}$ обнулятся. По этой же причине, для любой фиксированной пары i, j при $i \neq j$ можем считать, что $(s_{i,j}, s_{a,j})=1, (s_{i,j}, s_{i,b})=1$ для любых $a \neq j$ и $b \neq i$. Указанные ограничения будем обозначать знаком $\sum^*$.

Далее введем новые переменные

$$y_{r_1,\dots,r_k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i)\varphi(r_i)\right) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ r_i | d_i \forall i}} \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k} d_i}.$$

При условии, что произведение $d_1 d_2 \cdots d_k$ является бесквадратным числом, справедливо следующее тождество:

$$\sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i | r_i \forall i}} \frac{y_{r_1,\dots,r_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(r_i)} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i | r_i \forall i}} \left(\prod_{i=1}^{k}\mu(r_i)\right) \sum_{\substack{e_1,\dots,e_k \\ r_i | e_i \forall i}} \frac{\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k} e_i} =$$

$$= \sum_{e_1,\dots,e_k} \frac{\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k} e_i} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i | r_i \forall i \\ r_i | e_i \forall i}} \prod_{i=1}^{k}\mu(r_i) = \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k}\mu(d_i) d_i}. \tag{3}$$

Обозначим максимальное значение модуля переменных $y_{r_1,\dots,r_k}$ через $y_{\max}$, то есть:

$$y_{\max} = \max_{r_1,\dots,r_k} \left| y_{r_1,\dots,r_k} \right|.$$

Из определения переменной $y_{r_1,\dots,r_k}$ следует, что достаточно рассматривать наборы $r_1,\dots,r_k$ такие, что $r_1 \cdots r_k < R, \mu^2(r_1 \cdots r_k)=1$ и $(r_1 \cdots r_k, W)=1$. При невыполнении любого из вышеуказанных условий $y_{r_1,\dots,r_k}=0$.

Далее оценим $\lambda_{\max}$ через $y_{\max}$. Имеем

$$\lambda_{\max} \le \max_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ \mu^2\left(\prod_{i=1}^{k} d_i\right)=1}} y_{\max} \left(\prod_{i=1}^{k} d_i\right) \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ d_i | r_i \forall i \\ \prod_{i=1}^{k} r_i < R \\ \mu^2\left(\prod_{i=1}^{k} r_i\right)=1}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(r_i)}\right) \le$$

$$\le y_{\max} \max_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ \mu^2\left(\prod_{i=1}^{k} d_i\right)=1}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{d_i}{\varphi(d_i)}\right) \sum_{\substack{r' < R/\prod_{i=1}^{k} d_i \\ \left(r', \prod_{i=1}^{k} d_i\right)=1}} \frac{\mu(r')^2 \tau_k(r')}{\varphi(r')} \le$$

$$\le y_{\max} \max_{d_1,\dots,d_k} \sum_{d | \prod_{i=1}^{k} d_i} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} \sum_{\substack{r' < R/\prod_{i=1}^{k} d_i \\ \left(r', \prod_{i=1}^{k} d_i\right)=1}} \frac{\mu(r')^2 \tau_k(r')}{\varphi(r')} \le y_{\max} \sum_{u<R} \frac{\mu(u)^2 \tau_k(u)}{\varphi(u)}.$$

Окончательно получаем (см., например, [2], глава 5):

$$\lambda_{\max} << y_{\max} (\log R)^k. \tag{4}$$

Полученную нами оценку остаточного члена вида $O\left(\sqrt{N}\lambda_{\max}^2 R^2 (\log R)^{2k}\right)$, используя последнее неравенство, можно заменить на оценку в терминах $y_{\max}$ вида $O\left(\sqrt{N} y_{\max}^2 R^2 (\log R)^{4k}\right)$.

Обозначим $a_j = u_j \prod_{i \neq j} s_{i,j}$ и $b_j = u_j \prod_{i \neq j} s_{j,i}$.

Тогда, переходя к переменным $y_{r_1,\dots,r_k}$ для главного члена S_1, получаем выражение

$$\frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\left(\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)\right)\sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}\left(\prod_{\substack{1\le i,j\le k\\ i\ne j}}\mu(s_{i,j})\right)\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ u_i|d_i,e_i\ \forall i\\ s_{i,j}|d_i,e_j\ \forall i\ne j}}\frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{\left(\prod_{i=1}^{k}d_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k}e_i\right)}=$$

$$=\frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\left(\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)\right)\sum_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}{}^{*}\left(\prod_{\substack{1\le i,j\le k\\ i\ne j}}\mu(s_{i,j})\right)\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(a_i)\mu(b_i)}{\varphi(b_i)\varphi(a_i)}\right)y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}.$$

Так как при суммировании мы учитываем только попарно взаимно простые значения $u_j, s_{j,1}, s_{j,2},\dots,s_{j,k}$ и $u_j, s_{1,j}, s_{2,j},\dots,s_{k,j}$, то справедливы равенства $\mu(a_j)=\mu(u_j)\prod_{i\ne j}\mu(s_{i,j})$, $\mu(b_j)=\mu(u_j)\prod_{i\ne j}\mu(s_{j,i})$, $\varphi(a_j)=\varphi(u_j)\prod_{i\ne j}\varphi(s_{i,j})$, $\varphi(b_j)=\varphi(u_j)\prod_{i\ne j}\varphi(s_{j,i})$.

Таким образом, получаем для S_1 следующую формулу:

$$S_1=\frac{N}{W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right)\sum^{*}_{s_{1,2},\dots,s_{k,k-1}}\left(\prod_{\substack{1\le i,j\le k\\ i\ne j}}\frac{\mu(s_{i,j})}{\varphi(s_{i,j})^2}\right)y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}+O\left(\sqrt{N}y_{\max}^2R^2(\log R)^{4k}\right).$$

Как мы видели ранее, $y_{a_1,\dots,a_k}=0$ при $(a_1\dots a_k,W)>1$. Тогда при суммировании по $s_{i,j}$ достаточно учитывать только слагаемые $s_{i,j}=1$ и $s_{i,j}>D_0$.

Интуитивно понятно, что основной вклад должны вносить слагаемые, соответствующие случаю $s_{i,j}=1$.

Оценим вклад слагаемых $s_{i,j}>D_0$.

При некоторой фиксированной паре $i,\ j$ имеем

$$\frac{N}{2W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right)\sum^{*}_{s_{i,j},\dots,s_{k,k-1};\, s_{i,j}>D_0}\left(\prod_{\substack{1\le i,j\le k\\ i\ne j}}\frac{\mu(s_{i,j})}{\varphi(s_{i,j})^2}\right)y_{a_1,\dots,a_k}y_{b_1,\dots,b_k}<<$$

$$<<\frac{y_{\max}^2N}{2W}\left(\sum_{\substack{u<R\\ (w)}}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}\right)^{k}\left(\sum_{s_{i,j}>D_0}\frac{\mu(s_{i,j})^2}{\varphi(s_{i,j})^2}\right)\left(\sum_{s\ge 1}\frac{\mu(s)^2}{\varphi(s)^2}\right)^{k^2-k-1}<<\frac{y_{\max}^2\varphi(W)^kN(\log R)^k}{2W^{k+1}D_0}.$$

Таким образом, считая, что все $s_{i,j}$ в главном члене равны 1, получаем асимптотическую формулу:

$$S_1=\frac{N}{2W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\frac{y_{u_1,\dots,u_k}^2}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)}+O\left(\frac{y_{\max}^2\varphi(W)^kN(\log R)^k}{W^{k+1}D_0}+y_{\max}^2R^2(\log R)^{4k}\sqrt{N}\right).$$

Так как по определению $R^2=N^{\theta-2\delta}\le N^{1/2-2\delta}$ и $W<<N^{\delta}$, окончательно имеем

$$S_1=\frac{N}{2W}\sum_{u_1,\dots,u_k}\frac{y_{u_1,\dots,u_k}^2}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(u_i)}+O\left(\frac{y_{\max}^2\varphi(W)^kN(\log R)^k}{W^{k+1}D_0}\right).$$

Лемма доказана.

Далее получим асимптотическую формулу для суммы

$$S_2^{(m)} = \sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \nu_0 (\bmod W) \\ \{0.5\sqrt{n}\} \le 0.5}} \chi_{\mathrm{P}}(n + h_m) \left(\sum_{\substack{d_1, \ldots, d_k \\ d \mid n + h_i \; \forall i}} \lambda_{d_1, \ldots, d_k} \right)^2 .$$

ЛЕММА 2. *Пусть* g *−вполне мультипликативная функция, заданная на простых числах равенством* $g(p) = p - 2$. *Пусть*

$$y^{(m)}_{r_1 \ldots, r_k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1, \ldots, d_k \\ r_i \mid d_i \; \forall i \\ d_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1, \ldots, d_k}}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(d_i)}$$

и $y^{(m)}_{\max} = \max_{r_1, \ldots, r_k} \left| y^{(m)}_{r_1, \ldots, r_k} \right|$.

Тогда при любом фиксированном $A > 0$ *справедлива асимптотическая формула*

$$S_2^{(m)} = \frac{N}{2\varphi(W) \log N} \sum_{r_1, \ldots, r_k} \frac{\left(y^{(m)}_{r_1, \ldots, r_k} \right)^2}{\prod_{i=1}^{k} g(r_i)} + O\left(\frac{\left(y^{(m)}_{\max} \right)^2 \varphi(W)^{k-2} N (\log N)^{k-2}}{W^{k-1} D_0} \right) + O\left(\frac{y^2_{\max} N}{(\log N)^A} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Поменяем порядок суммирования и раскроем скобки в сумме $S_2^{(m)}$.

Получим

$$S_2^{(m)} = \sum_{\substack{d_1, \ldots, d_k \\ e_1, \ldots, e_k}} \lambda_{d_1, \ldots, d_k} \lambda_{e_1, \ldots, e_k} \sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \nu_o (\bmod W) \\ [d_i, e_i] \mid n + h_i \; \forall i \\ \{0.5\sqrt{n}\} \le 0.5}} \chi_{\mathrm{P}}(n + h_m).$$

Как и для суммы S_1, мы можем считать, что суммирование во внешней сумме ведется по наборам $d_1, \ldots, d_k, e_1, \ldots, e_k$ для которых числа $W, [d_1, e_1], [d_2, e_2], \ldots, [d_k, e_k]$ являются попарно взаимно простыми. Кроме того, вклад в сумму будут давать только слагаемые, соответствующие $d_1 = e_1 = 1$

Пусть $q = W[d_1, e_1][d_2, e_2] \ldots [d_k, e_k]$.

Обозначим также

$$X_N = \sum_{N \le n < 2N} \chi_{\mathrm{P}}(n).$$

Гриценко в 1986 году [3] показал, что для X_N справедлива асимптотическая формула

$$X_N = \frac{N}{2 \log N} + O\left(\frac{N}{\log^2 N} \right).$$

Рассмотрим внутреннюю сумму при указанных выше условиях. Имеем

$$\sum_{\substack{N \le n < 2N \\ n \equiv \nu_o (\bmod W) \\ [d_i, e_i] \mid n + h_i \; \forall i}} \chi_{\mathrm{P}}(n + h_m) = \frac{\pi(2N) - \pi(N)}{2\varphi(q)} + O(E(N, q)),$$

где

$$E(N,q)=1+\max_{(a,q)=1}\left|\sum_{\substack{N\le n<2N\\ n\equiv a(\mathrm{mod}\, q)}}\chi_{\mathrm{P}}(n)-\frac{1}{\varphi(q)}\chi_{\mathrm{P}}(n)\right|.$$

Таким образом, для $S_2^{(m)}$ получаем

$$S_2^{(m)}=\frac{X_N}{\varphi(W)}\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k\\ e_m=d_m=1}}{}' \frac{\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}}{\prod_{i=1}^k [d_i,e_i]}+O\left(\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}}\left|\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}\right|E(N,q)\right).$$

Оценим остаточный член. Предварительно, заметим, что каждому бесквадратному $q=W[d_1,e_1][d_2,e_2]\dots[d_k,e_k]<WR^2$ соответствует не более $\tau_{3k}(q)$ различных наборов $d_1,\dots,d_k,e_1,\dots,e_k$.

Применяя неравенство (4), получаем

$$\sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ e_1,\dots,e_k}}\left|\lambda_{d_1,\dots,d_k}\lambda_{e_1,\dots,e_k}\right|E(N,q)\le y_{\max}^2(\log R)^{2k}\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2\tau_{3k}(r)E(N,r).$$

Для оценки последней суммы воспользуемся неравенством Коши. Имеем

$$\left|\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2\tau_{3k}(r)E(N,r)\right|^2\le\left(\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2\tau_{3k}^2(r)E(N,r)\right)\left(\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2E(N,r)\right).$$

В первой скобке воспользуемся оценкой, вытекающей из неравенства Бруна-Титчмарша [2]

$$E(N,r)=O(N/\varphi(r)).$$

Далее, с учетом известной оценки для суммы квадратов числа делителей [4] и нижней границы для функции Эйлера, имеем

$$\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2\tau_{3k}^2(r)E(N,r)<<N\log^{9k^2+3}N.$$

Для оценки второй скобки воспользуемся теоремой 2, которая является аналогом теоремы Бомбьери-Виноградова для *«специальных»* простых чисел. Получаем, что для любого $A_1>0$ справедлива оценка

$$\left(\sum_{r<R^2W}\mu(r)^2E(N,r)\right)=O\left(N/\log^{A_1}N\right),$$

константа в знаке O зависит только от A_1.

Выберем $A_1>9k^2+4k+3+A$, где $A>0-$ константа.

Тогда окончательно получаем для остаточного члена оценку вида

$$O\left(\frac{y_{\max}^2N}{\log^A N}\right),$$

константа в знаке O зависит только от A и k.

Рассмотрим теперь главный член.

Нам понадобится следующее тождество, справедливое для бесквадратных d_i,e_i:

$$\frac{1}{\varphi([d_i,e_i])}=\frac{1}{\varphi(d_i)\varphi(e_i)}\sum_{u_i|[d_i,e_i]}g(u_i).$$

Здесь g – вполне мультипликативная функция, такая что $g(p)=p-2$ для любого простого значения p.

Как и при доказательстве леммы 1 мы запишем условие $(d_i, e_j)=1$ при помощи введения разрывного множителя вида $\sum_{s_{i,j} | d_i e_j} \mu(s_{i,j})$, считая, что $s_{i,j}$ взаимно просто с числами u_i, u_j, $s_{i,a}$ и $s_{b,j}$ для всех $a \neq i$ и $b \neq j$ и обозначая этот факт $\sum^*$ при суммировании по $s_{i,j}$.

Тогда для главного члена получим следующее выражение:

$$\frac{X_N}{\varphi(W)} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \left(\prod_{i=1}^{k} g(u_i) \right) \sum\nolimits^*_{s_{1,2},\ldots,s_{k,k-1}} \left(\prod_{1 \le i,j \le k} \mu(s_{i,j}) \right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ e_1,\ldots,e_k \\ u_i | (d_i, e_i) \forall i \\ s_{i,j} | (d_i, e_j) \forall i \neq j \\ d_m = e_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k} \lambda_{e_1,\ldots,e_k}}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(d_i) \varphi(e_i)}.$$

Введем новые переменные:

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = \left(\prod_{i=1}^{k} \mu(r_i) g(r_i) \right) \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ r_i | d_i \ \forall i \\ d_m = 1}} \frac{\lambda_{d_1,\ldots,d_k}}{\prod_{i=1}^{k} \varphi(d_i)}.$$

Заметим, что в случае $r_m > 1$ по определению получаем $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k} = 0$.

Как и при доказательстве леммы 1 обозначим $a_j = u_j \prod_{i \neq j} s_{i,j}$ и $b_j = u_j \prod_{i \neq j} s_{j,i}$ для всех $1 \le j \le k$, отметив, что выполнены условия $\mu(a_j) = \mu(u_j) \prod_{i \neq j} \mu(s_{j,i})$, $\mu(b_j) = \mu(u_j) \prod_{i \neq j} \mu(s_{i,j})$, $g(a_j) = \mu(u_j) \prod_{i \neq j} \mu(s_{j,i})$, $g(b_j) = \mu(u_j) \prod_{i \neq j} \mu(s_{i,j})$.

Оценим вклад в сумму слагаемых, соответствующих $s_{i,j} > 1$. Для него имеем оценку

$$<< \frac{\left(y^{(m)}_{\max}\right)^2 N}{\varphi(W) \log N} \left(\sum_{\substack{u<R \\ (u,W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{g(u)} \right)^{k-1} \left(\sum_{s} \frac{\mu(s)^2}{g(s)^2} \right)^{k(k-1)-1} \sum_{s_{i,j} > D_0} \frac{\mu(s_{i_1,i_2})^2}{g(s_{i,j})^2} << \frac{\left(y^{(m)}_{\max}\right)^2 \varphi(W)^{k-2} N (\log R)^{k-1}}{W^{k-1} D_0 \log N}.$$

Таким образом, для $S_2^{(m)}$ окончательно получаем:

$$S_2^{(m)} = \frac{N}{2\varphi(W) \log N} \sum_{u_1,\ldots,u_k} \frac{\left(y^{(m)}_{u_1,\ldots,u_k}\right)^2}{\prod_{i=1}^{k} g(u_i)} + O\left(\frac{\left(y^{(m)}_{\max}\right)^2 \varphi(W)^{k-2} N (\log R)^{k-2}}{D_o W^{k-1}} \right) + O\left(\frac{y^2_{\max} N}{(\log N)^A} \right).$$

Далее рассмотрим связь между переменными $y^{(m)}_{u_1,\ldots,u_k}$ и $y_{u_1,\ldots,u_k}$.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Пусть* $r_m = 1$. *Тогда*

$$y^{(m)}_{u_1,\ldots,u_k} = \sum_{a_m} \frac{y_{r_1,\ldots,r_{m-1},a_m,r_{m+1},\ldots,r_k}}{\varphi(a_m)} + O\left(\frac{y_{\max} \varphi(W) \log R}{W D_0} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в определение переменных $y^{(m)}$ выражение (3), полагая в нем $r_m = 1$. Получим

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}=\left(\prod_{i=1}^{k}\mu(r_i)g(r_i)\right)\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ r_i\mid d_i\ \forall i\\ d_m=1}}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(d_i)d_i}{\varphi(d_i)}\right)\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k\\ d_i\mid a_i\ \forall i}}\frac{y_{a_1,\ldots,a_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(a_i)}.$$

Сделаем суммирование по a внешним:

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}=\left(\prod_{i=1}^{k}\mu(r_i)g(r_i)\right)\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k\\ r_i\mid d_i\ \forall i}}\left(\frac{y_{a_1,\ldots,a_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(a_i)}\right)\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ d_i\mid a_i,\ r_i\mid d_i\ \forall i\\ d_m=1}}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(d_i)d_i}{\varphi(d_i)}.$$

Рассмотрим внутреннюю сумму. Имеем

$$\sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k\\ d_i\mid a_i,\ r_i\mid d_i\ \forall i\\ d_m=1}}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu(d_i)d_i}{\varphi(d_i)}=\prod_{i\neq m}\left(\sum_{d_i,\ d_i\mid a_i,\ r_i\mid d_i}\frac{\mu(d_i)d_i}{\varphi(d_i)}\right).$$

Мы можем вычислить сумму по каждой переменной d_i. Действительно,

$$\sum_{d_i,\ d_i\mid a_i,\ r_i\mid d_i}\frac{\mu(d_i)d_i}{\varphi(d_i)}=\frac{\mu(r_i)r_i}{\varphi(r_i)}\sum_{d\mid\frac{a_i}{r_i}}\frac{\mu(d)d}{\varphi(d)}=\frac{\mu(a_i)r_i}{\varphi(a_i)}.$$

Тогда для $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}$ получаем выражение:

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}=\left(\prod_{i=1}^{k}\mu(r_i)g(r_i)\right)\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k\\ r_i\mid a_i\ \forall i}}\left(\frac{y_{a_1,\ldots,a_k}}{\prod_{i=1}^{k}\varphi(a_i)}\right)\prod_{i\neq m}\frac{\mu(a_i)r_i}{\varphi(a_i)}.$$

Из определения $y^{(m)}_{a_1,\ldots,a_k}$ следует, что достаточно рассматривать только суммирование по $(a_j,W)=1$. Тогда либо $a_j=r_j$, либо $a_j>D_0r_j$.

Оценим вклад слагаемых, соответствующих $a_j>D_0r_j$ при $j\neq m$.

Для него справедливы оценки

$$\ll y_{\max}\left(\prod_{i=1}^{k}g(r_i)r_i\right)\sum_{a_j>D_0r_j}\left(\frac{\mu(a_j)^2}{\varphi(a_j)^2}\right)\sum_{\substack{a_m<R\\ (a_m,W)=1}}\left(\frac{\mu(a_m)^2}{\varphi(a_m)}\right)\prod_{\substack{1\le i\le k\\ i\neq j,m}}\left(\sum_{r_i\mid a_i}\frac{\mu(a_i)^2}{\varphi(a_i)^2}\right)\ll$$

$$\ll\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{g(r_i)r}{\varphi(r_i)^2}\right)\frac{y_{\max}\varphi(W)\log R}{WD_0}\ll\frac{y_{\max}\varphi(W)\log R}{WD_0}.$$

Тогда для $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}$ окончательно получаем

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{g(r_i)r_i}{\varphi(r_i)^2}\right)\sum_{a_m}\frac{y_{r_1,\ldots,r_{m-1},a_m,r_{m+1},\ldots,r_k}}{\varphi(a_m)}+O\left(\frac{y_{\max}\varphi(W)\log R}{WD_0}\right).$$

Так как $(r_i,W)=1$ справедлива оценка

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{g(r_i)r_i}{\varphi(r_i)^2}\le\prod_{p>D_0}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)^k=1+O\left(D_0^{-1}\right).$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая техническая лемма, доказанная в [5] на основе результатов [2], Глава 5.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\kappa, A_1, A_2, L > 0$. *Пусть* γ *– вполне мультипликативная функция, которая удовлетворяет условию* $0 \le \dfrac{\gamma(p)}{p} \le 1 - A_1$ *при любом простом p.*

Пусть также при любом $2 \le w \le z$ *выполняется двойное неравенство*

$$-L \le \sum_{w \le p \le z} \frac{\gamma(p)\log p}{p} - \kappa \log z / w \le A_2 .$$

Положим далее g – вполне мультипликативная функция, заданная на простых числах равенством $g(p) = \gamma(p)/(p - \gamma(p))$. *Пусть, наконец,* $G : [0,1] \to \mathrm{R}$ *кусочно дифференцируемая функция и* $G_{\max} = \sup_{t\in[0,1]}(|G(t)| + |G'(t)|)$.

Тогда справедлива формула

$$\sum_{d<z} \mu(d)^2 g(d) G\left(\frac{\log D}{\log z}\right) = S\,\frac{(\log z)^k}{\Gamma(\kappa)} \int_0^1 G(x) x^{\kappa-1} dx + O_{A_1, A_2, \kappa}\left(SLG_{\max}(\log z)^{k-1}\right),$$

где

$$S = \prod_p \left(1 - \frac{\gamma(p)}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\kappa} .$$

Константы в знаке O не зависят от G и L.

Для получения более удобной асимптотической формулы для суммы S_1 будем предполагать, что

$$y_{r_1,\dots,r_k} = F\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_k}{\log R}\right) \tag{5}$$

для некоторой кусочно-дифференцируемой функции $F : \mathrm{R}^k \to \mathrm{R}$, заданной на множестве $\Re_k = \left\{(x_1, \dots, x_k) \in [0,1]^k : \sum_{i=1}^k x_i \le 1\right\}$. Напомним также, что $y_{r_1,\dots,r_k} = 0$, если $(r_1 \cdots r_k, W) > 1$ или $\mu(r_1 \cdots r_k) = 0$.

Далее получим асимптотическую формулу для S_1 через значения функции F.

ЛЕММА 5. *Пусть* $y_{r_1,\dots,r_k}$ *заданы в форме (5). Обозначим*

$$F_{\max} = \sup_{(t_1,\dots,t_k)\in[0,1]^k} |F(t_1,\dots,t_k)| + \sum_{i=1}^k \left|\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_k)\right| .$$

Тогда справедлива формула

$$S_1 = \frac{\varphi(W)^k N (\log R)^k}{2W^{k+1}} I_k(F) + O\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log R)^k}{W^{k+1} D_0}\right),$$

где

$$I_k(F) = \int_0^1 \dots \int_0^1 F^2(t_1,\dots,t_k) dt_1 \dots dt_k .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Используем результат леммы 1, предварительно подставив выражение для *y*. Получаем

$$S_1 = \frac{N}{2W} \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k \\ (u_i, u_j)=1\, \forall i \ne j \\ (u_i, W)=1\, \forall i}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right) F\left(\frac{\log u_1}{\log R}, \dots, \frac{\log u_k}{\log R}\right)^2 + O\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log R)^k}{W^{k+1} D_0}\right).$$

Исключим условие $(u_i, u_j)=1$. Оценим вклад слагаемых, которые мы при этом добавляем в сумму.

Пусть $(u_i, u_j)=x>1$. Так как $(u_i, W)=(u_j, W)=1$ очевидно существует простое $p>D_0$ такое, что $p \mid x$.

Тогда имеем

$$\sum_{\substack{u_1,\dots,u_k \\ (u_i,u_j)=1\,\forall i\neq j \\ (u_i,W)=1\,\forall i}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right) F\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log u_k}{\log R}\right)^2 << \frac{F_{\max}^2 N}{W} \sum_{p>D_0} \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k<R \\ p \mid (u_i,u_j) \\ (u_i,W)=1\,\forall i}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(r_i)^2}{\varphi(u_i)} <<$$

$$<< \frac{F_{\max}^2 N}{W} \sum_{p>D_0} \frac{1}{(p-1)^2} \left(\sum_{\substack{u<R \\ (u,W)=1}} \frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)} \right)^k << \frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log R)^k}{W^{k+1} D_0}.$$

Таким образом, для S_1 получаем:

$$S_1 = \frac{N}{W} \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k \\ (u_i,W)=1\,\forall i}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\mu(u_i)^2}{\varphi(u_i)}\right) F\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log u_k}{\log R}\right)^2 + O\left(\frac{F_{\max}^2 \varphi(W)^k N (\log R)^k}{W^{k+1} D_0}\right).$$

Используя лемму 4, мы можем асимптотически вычислить сумму:

$$\sum_{\substack{(u_k,W)=1 \\ u_k<R/(u_1u_2\cdots u_{k-1})}} \frac{\mu^2(u_k)}{\varphi(u_k)} F\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log u_k}{\log R}\right)^2.$$

Положим в лемме 4

$$\kappa=1,\ \gamma(p)=\begin{cases} 1, \textit{ p не делит } W, \\ 0, \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{(u_k,W)=1 \\ u_k<R}} \frac{\mu^2(u_k)}{\varphi(u_k)} F\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log u_k}{\log R}\right) = \prod_{p}\left(1-\frac{\gamma(p)}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)\log R \int_0^1 F^2\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log u_k}{\log R}\right)dt_k +$$

$$+O\left(\prod_{p}\left(1-\frac{\gamma(p)}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right) L F_{\max}^2\right).$$

Заметим, что (см., например, [2])

$$\sum_{w\le p\le z} \frac{\log p}{p} = \log(z/w)+O(1).$$

Следовательно, можно подобрать такую константу A_2, что

$$\sum_{w\le p\le \log R} \frac{\gamma(p)\log p}{p} - \log\frac{\log R}{w} \le A_2.$$

Далее при $w<D_0$ имеем

$$\sum_{w\le p\le \log R} \frac{\gamma(p)\log p}{p} = \sum_{w\le p\le \log R} \frac{\gamma(p)}{p} - \sum_{w\le p\le D_0} \frac{\log p}{p},$$

$$\sum_{w\le p\le D_0}\frac{\log p}{p}\le \log D_0+A_2 .$$

Положим

$$L=\log D_0+A_2 .$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\prod_p\left(1-\frac{\gamma(p)}{p}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\varphi(W)}{W}.$$

Тогда получаем

$$\sum_{\substack{(u_k,W)=1\\ u_k<R}}\frac{\mu^2(u_k)}{\varphi(u_k)}F\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log u_k}{\log R}\right)=\frac{\varphi(W)\log R}{W}\int_0^1 F^2\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log r_k}{\log R}\right)dt_k+$$

$$+O\left(\frac{\varphi(W)F_{\max}^2}{W}\log D_0\right).$$

Действуя аналогичным образом при суммировании по каждой переменной $u_{k-1},u_{k-2},\dots,u_1$, получаем для S_1 выражение вида:

$$S_1=\frac{\varphi(W)^k N(\log R)^k}{2W^{k+1}}I_k(F)+O\left(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\log R)^{k-1}\log D_0}{W^{k+1}}\right)+O\left(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\log R)^k}{W^{k+1}D_0}\right).$$

Так как по определению параметров R и D имеем $\log R>>D_0\log D_0$, то первый остаточный член можно не учитывать.

Лемма доказана.

Теперь мы будем заниматься получением асимптотической формулы для $S_2^{(m)}$ в терминах функции F. Для этого, сначала, получим выражение для $y_{r_1,\dots,r_k}^{(m)}$ через F.

ЛЕММА 6. *Пусть* $y_{r_1,\dots,r_k}$ *заданы в форме (5),*

$$F_{\max}=\sup_{(t_1,\dots,t_k)\in[0,1]^k}\left|F(t_1,\dots,t_k)\right|+\sum_{i=1}^k\left|\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_1,\dots,t_k)\right|.$$

Тогда справедлива формула

$$y_{r_1,\dots,r_k}^{(m)}=(\log R)\frac{\varphi(W)}{W}\left(\prod_{i=1}^k\frac{\varphi(r_i)}{r_i}\right)\int_0^1 F\left(\frac{\log r_1}{\log R},\dots\frac{\log r_{m-1}}{\log R},t_m,\frac{\log r_{m+1}}{\log R},\dots\frac{\log r_k}{\log R}\right)dt_m+$$

$$+O\left(\frac{F_{\max}\varphi(W)\log R}{WD_0}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Используя лемму 3 и равенство (5) получаем

$$y_{r_1,\dots,r_k}^{(m)}=\sum_{\left(u,W\prod_{i=1}^k r_i\right)}\frac{\mu(u)^2}{\varphi(u)}F\left(\frac{\log r_1}{\log R},\dots\frac{\log r_{m-1}}{\log R},\frac{\log u}{\log R},\frac{\log r_{m+1}}{\log R},\dots\frac{\log r_k}{\log R}\right)+$$

$$+O\left(\frac{F_{\max}\varphi(W)\log R}{WD_0}\right).$$

Справедлива оценка

$$y_{\max}^{(m)}<<\frac{\varphi(W)F_{\max}\log R}{W}.$$

Для получения асимптотической формулы для $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}$ воспользуемся леммой 4 с $\kappa=1,\ \gamma(p)=\begin{cases}1, \textit{ p не делит } W\prod_{i=1}^k r_i,\\ 0, \textit{ иначе.}\end{cases}$

Далее заметим, что

$$1+\sum_{p\left|W\prod_{i=1}^k r_i\right.}\frac{\log p}{p} << \sum_{p<\log R}\frac{\log p}{p}+\sum_{\substack{p\left|W\prod_{i=1}^k r_i\right.\\ p>\log R}}\frac{\log\log R}{\log R} << \log\log N .$$

Следовательно L мы можем выбрать из условия $L=O(\log\log N)$.

Тогда окончательно получаем

$$y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}=\frac{\varphi(W)\log R}{W}\left(\prod_{i=1}^k\frac{\varphi(r_i)}{r_i}\right)\int_0^1 F\left(\frac{\log r_1}{\log R},\ldots\frac{\log r_{m-1}}{\log R},t_m,\frac{\log r_{m+1}}{\log R},\ldots\frac{\log r_k}{\log R}\right)dt_m+$$
$$+O\left(\frac{F_{\max}\varphi(W)\log R}{WD_0}\right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть* $y_{r_1,\ldots,r_k}$ *заданы в форме (5),*

$$F_{\max}=\sup_{(t_1,\ldots,t_k)\in[0,1]^k}\left|F(t_1,\ldots,t_k)\right|+\sum_{i=1}^k\left|\frac{\partial F}{\partial t_i}(t_1,\ldots,t_k)\right|.$$

Тогда справедлива формула

$$S_2^{(m)}=\frac{\varphi(W)^k N(\log R)^{k+1}}{2W^{k+1}\log N}J_k^{(m)}(F)+O\left(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\log R)^k}{W^{k+1}D_0}\right),$$

где

$$J_k^{(m)}(F)=\int_0^1\ldots\int_0^1\left(\int_0^1 F(t_1,\ldots,t_k)dt_m\right)^2 dt_1\ldots dt_{m-1}dt_{m+1}\ldots dt_k .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Оценка суммы $S_2^{(m)}$ во многом похожа на оценку суммы S_1.

Из леммы 4 легко видеть, что если $r_m=1$ и $r=\prod_{i=1}^k r_i$ удовлетворяет условиям $(r,W)=1$ и $\mu(r)^2=1$, то $y_{r_1,\ldots,r_k}$ определяется формулой леммы 6. В противном случае $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}=0$.

Подставим выражение для $y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}$ из леммы 6 в асимптотическую формулу $S_2^{(m)}$ из леммы 3:

$$S_2^{(m)}=\frac{N}{2\varphi(W)\log N}\sum_{r_1,\ldots,r_k}\frac{\left(y^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}\right)^2}{\prod_{i=1}^k g(r_i)}+O\left(\frac{\left(y^{(m)}_{\max}\right)^2\varphi(W)^{k-2}N(\log N)^{k-2}}{W^{k-1}D_0}\right)+O\left(\frac{y_{\max}^2 N}{(\log N)^A}\right).$$

Тогда получаем

$$S_2^{(m)}=\frac{\varphi(W)N(\log R)^2}{2W^2\log N}\sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k\\ (r_i,W)=1\,\forall i\\ (r_i,r_j)=1\,\forall i\neq j\\ r_m=1}}\left(\prod_{i=1}^k\frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)}{g(r_i)r_i}\right)\left(F^{(m)}_{r_1,\ldots,r_k}\right)^2+O\left(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\log R)^k}{W^{k+1}D_0}\right).$$

Для вклада слагаемых, соответствующих случаю $(r_i, r_j)>1$ рассуждением, аналогичным содержащемуся в доказательстве леммы 5, получим оценку

$$<<\frac{\varphi(W)N(\log R)^2 F_{\max}^2}{2W^2\log N}\left(\sum_{p>D_0}\frac{\varphi(p)^2}{g(p)^2 p^2}\right)\left(\sum_{\substack{r<R\\(r,W)=1}}\frac{\mu(r)^2\varphi(r)}{g(r)r}\right)^{k-1} << \frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\log N)^k}{2W^{k+1}D_o}.$$

Далее рассмотрим суммы вида

$$\sum_{\substack{r_1,\dots,r_{m-1},r_{m+1},\dots,r_k\\(r_i,W)=1\forall i}}\left(\prod_{\substack{1\le i\le k\\ i\ne j}}\frac{\mu(r_i)^2\varphi(r_i)}{g(r_i)r_i}\right)\left(F_{r_1,\dots,r_k}^{(m)}\right)^2$$

по каждой переменной r_i

Для оценки таких сумм воспользуемся леммой 4.

Пусть $k=1$ и

$$\gamma(p)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{p^2-p-1}, & p \text{ не делит } W,\\ 0, \text{ иначе};\end{cases}$$

$$L<<1+\sum_{p\mid W}\frac{\log p}{p}<<\log D_0,$$

для подходящих констант A_1, A_2.

Тогда окончательно получим

$$S_2^{(m)}=\frac{\varphi(W)^k N(\log R)^{k+1}}{2W^{k+1}}J_k^{(m)}+O\left(\frac{F_{\max}^2\varphi(W)^k N(\log N)^k}{W^{k+1}D_o}\right),$$

где

$$J_k^{(m)}=\int_0^1\dots\int_0^1\left(\int_0^1 F(t_1,\dots,t_k)dt_m\right)^2 dt_1\dots dt_{m-1}dt_{m+1}\dots dt_k.$$

Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 1.

Нам достаточно показать, что

$$S_2>S_1. \tag{6}$$

Действительно, в (1) и (2) внутренние суммы $\left(\sum_{d_i|n+h_i\forall i}\lambda_{d_1,\dots,d_k}\right)^2$ неотрицательны при любом n. Коэффициент, стоящий в (2) перед каждой такой суммой, равен $\sum_{i=1}^k\chi_{\mathrm{P}}(n+h_i)$ и может принимать значения $0, 1, 2, \dots, k$.

Но тогда из (6) следует, что среди значений $\sum_{i=1}^k\chi_{\mathrm{P}}(n+h_i)$ есть хотя бы одно большее единицы. Таким образом, мы нашли промежуток длины не более $|h_k-h_1|$, содержащий не менее двух простых чисел.

Далее, меняя пределы внешнего суммирования в (1) и (2) на $[2N,4N),[4N,8N),\ldots$ и повторяя указанные рассуждения, мы сможем построить бесконечное количество таких промежутков.

Теперь рассмотрим частное S_2 / S_1. Из лемм 5, 6 имеем

$$\frac{S_2}{S_1} \geq \frac{\sum_{j=1}^{k} J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} \cdot \frac{\log R}{\log N}.$$

С учетом определения R, для выполнения условия (6), нам достаточно выбрать функцию F и соответствующую размерность k так, чтобы

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} J_k^{(m)}(F)}{I_k(F)} > 6.000001 .$$

Пусть F представлена в форме

$$F(t_1,\ldots,t_k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} g(kt_i), & \textit{если } \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

где $g(t) = 1/(1+AT)$ для $t \in [0, T/k]$, для некоторой константы $A > 0$ и T такого, что $1+AT = e^A$.

Выбранная функция симметрична, и для простоты можем писать J_k вместо любого значения $J_k^{(m)}$. Аналогично, будем писать I_k вместо $I_k(F)$.

Обозначим

$$\gamma = \int_{t\geq 0} g(t)^2\, dt .$$

Тогда имеем

$$I_k = \int \underset{\Re_k}{\ldots} \int F(t_1,\ldots,t_k)^2\, dt_1 \ldots dt_k \leq \left(\int_0^\infty g(kt)^2\, dt \right)^k = k^{-k}\gamma^k. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим J_k. Так как функция g задана на отрезке $[0,T]$ и квадрат всегда неотрицателен мы получим для J_k нижнюю оценку, вводя условие $\sum_{i=2}^{k} t_i < 1 - T/k$.

Таким образом, имеем

$$J_k \geq \int \underset{\substack{t_2,\ldots,t_k \geq 0 \\ \sum_{i=2}^{k} t_i \leq 1 - T/k}}{\ldots} \int \left(\int_0^{T/k} \left(\prod_{i=1}^{k} g(kt_i) \right) dt_1 \right)^2 dt_2 \ldots dt_k. \tag{8}$$

Правую часть в (8) мы можем записать в виде $J_k' - E_k$, где

$$J_k' = \int \underset{t_2,\ldots t_k \geq 0}{\ldots} \int \left(\int_0^{T/k} \left(\prod_{i=1}^{k} g(kt_i) \right) dt_1 \right)^2 dt_2 \ldots dt_k =$$

$$= \left(\int_0^\infty g(kt_1) dt_1 \right)^2 \left(\int_0^\infty g(kt)^2\, dt \right)^{k-1} = k^{-k-1}\gamma^{k-1} \left(\int_0^\infty g(u)\, du \right)^2,$$

$$E_k=\int\limits_{\substack{t_2,\dots,t_k\geq 0\\ \sum_{i=2}^k t_i>1-T/k}}\dots\int\left(\int_0^{T/k}\left(\prod_{i=1}^k g(kt_i)\right)dt_1\right)^2 dt_2\dots dt_k=$$

$$=k^{-k-1}\left(\int_0^\infty g(u)du\right)^2\int\limits_{\substack{u_2,\dots,u_k\\ \sum_{i=2}^k u_i>k-T}}\dots\int\prod_{i=2}^k g(u_i)^2 du_2\dots du_k.$$

Обозначим

$$\mu=\frac{\int_0^\infty ug(u)^2du}{\int_0^\infty g(u)^2du}<1-\frac{T}{k}.$$

Для упрощения записи обозначим $\eta=(k-T)/(k-1)-\mu>0$. Если $\sum_{i=2}^k u_i>k-T$, то $\sum_{i=2}^k u_i>(k-1)\mu$ и справедлива оценка

$$1\leq\eta^{-2}\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^k u_i-\mu\right)^2. \tag{9}$$

Так как правая часть (8) неотрицательна при любом u_i, мы получим верхнюю оценку E_k, перемножая $\eta^{-2}\left(\sum_{i=2}^k u_i/(k-1)-\mu\right)^2$ и не учитывая условие $\sum_{i=1}^k u_i>k-T$.

Тогда получим

$$E_k\leq\eta^{-2}k^{-k-1}\left(\int_0^\infty g(u)du\right)^2\left(\frac{\mu T\gamma^{k-1}}{k-1}-\frac{\mu^2\gamma^{k-1}}{k-1}\right)\leq\frac{\eta^{-2}\mu Tk^{-k-1}\gamma^{k-1}}{k-1}\left(\int_0^\infty g(u)du\right)^2. \tag{10}$$

Далее находим

$$\int_0^\infty\dots\int_0^\infty\left(\frac{2\sum_{2\leq i<j\leq k}u_iu_j}{(k-1)^2}-\frac{2\mu\sum_{i=2}^k u_i}{k-1}+\mu^2\right)du_2\dots du_k=\frac{-\mu^2\gamma^{k-1}}{k-1}.$$

Для u_j^2 справедливо неравенство $u_j^2g(u_j)^2\leq Tu_jg(u_j)^2$ на всей области определения функции g. Тогда

$$\int_0^\infty\dots\int_0^\infty u_j^2\left(\prod_{i=2}^k g(u_i)^2\right)du_2\dots du_k\leq T\gamma^{k-2}\int_0^\infty u_jg(u_j)^2du_j=\mu T\gamma^{k-1}. \tag{11}$$

Далее имеем

$$E_k\leq\eta^{-2}k^{-k-1}\left(\int_0^\infty g(u)du\right)^2\left(\frac{\mu T\gamma^{k-1}}{k-1}-\frac{\mu^2\gamma^{k-1}}{k-1}\right)\leq\frac{\eta^{-2}\mu Tk^{-k-1}\gamma^{k-1}}{k-1}\left(\int_0^\infty g(u)du\right)^2.$$

Так как $(k-1)\eta^2\geq k(1-T/k-\mu)^2$ и $\mu\leq 1$, используя (7), (8), (9) и (11), получаем

$$\frac{kJ_k}{I_k}\geq\frac{\left(\int_0^\infty g(u)du\right)^2}{\int_0^\infty g^2(u)du}\left(1-\frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2}\right). \tag{12}$$

Так как $g(t)=1/(1+AT)$ для $t\in[0,T/k]$ и некоторой константы $A>0$, приходим к равенствам

$$\int_0^{T/k}g(u)du=\frac{\log(1+AT)}{A},\ \int_0^T g(u)^2du=\frac{1}{A}\left(1-\frac{1}{1+AT}\right), \tag{13}$$

$$\int_0^T ug(u)^2du=\frac{1}{A^2}\left(\log(1+AT)-1+\frac{1}{1+AT}\right). \tag{14}$$

Так как T выбрано из условия $1+AT=e^A$, сразу получаем $\mu=1/\left(1-e^{-A}\right)-A^{-1}$.

Используя (12), (13), (14), приходим к оценке

$$\frac{kJ_k}{I_k} \geq \frac{A}{1-e^{-A}}\left(1-\frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2}\right) \tag{15}$$

Выбираем

$$A = \log k - 2\log\log k > 0.$$

Теперь мы можем вычислить значения правой части (15) для

$$k = 3,4,...$$

При $k=69248$ получим

$$\frac{A}{1-e^{-A}}\left(1-\frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2}\right) = 6.00000103\ldots.$$

Согласно [6] допустимое множество из 69248 элементов построено, при этом

$$|h_k - h_1| = 478830.$$

Теорема доказана.

Список литературы
References

1. Гриценко С.А., Зинченко Н.А. 2013. Об оценке одной тригонометрической суммы по простым числам, Научные ведомости БелГУ, Серия: Математика. Физика. № 5(148). Вып. 30: 48–52.

Gritsenko S.A, Zynchenko N.A. On the estimate of a trigonometric sum over primes. 2013. Nauchnyye vedomosti BelGU, Series: Math. Physics. № 5(148). Vol. 30: 48–52. (In Russian).

2. Halberstam H., Richert H.-R. 1974. Sieve Methods. Academic Press, London.

3. Гриценко С.А. 1986. Об одной задаче И.М. Виноградова. Математические заметки. т. 39(5): 625–640.

Gritsenko S.A. A problem of I.M. Vinogradov. 1986. Matematicheskie Zametki. Vol. 39(5): 625–640.

4. Митькин Д.А. 2006. Об оценке некоторых арифметических сумм с числом делителей. Математические заметки, т. 80(3): 471–472.

Mit’kin D.A. 2006. Estimates of certain arithmetic sums related to the number of divisors. Matematicheskie Zametki. Vol. 80(3): 449–450.

5. Goldston D.A., Graham S. W., Pintz J., and Yildirim C. Y. 2009. Small gaps between products of two primes. Proc. Lond. Math. Soc, 98(3):741–774.

6. Sutherland A.V. http://math.mit.edu/~drew/partition_bounds_342_plus_4000000.txt.

7. Maynard J. Small gaps between primes. 2014. Ann. of Math, SECOND SERIES, Vol. 181, No. 1, pp. 383–413.

8. Hooley C. Applications of sieve methods to the theory of numbers. 1977. Bull. Amer. Math. Soc. 83, no. 5, 1015–1021.

Hooley C. Applications of sieve methods to the theory of numbers. 1977. Bull. Amer. Math. Soc. 83, no. 5, 1015–1021.

9. Прахар К. Распределение простых чисел. 1967. М., Мир.

Prahar K. Distribution of prime numbers. 1967. M, Mir (in Russian)

11. Goldston D. A., Pintz J., and Yıldırım C. Y. Primes in tuples. III. 2006. On the difference pn+ ν − pn. Funct. Approx. Comment. Math., 35:79–89.

12. Goldston D. A. and Yıldırım C. Y. 2007. Higher correlations of divisor sums related to primes. III. Small gaps between primes. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 95(3):653–686.

13. Polymath D. H. J. A new bound for gaps between primes. Preprint. https://arxiv.org/abs/1409.8361.

14. Selberg A.. Collected papers. Vol. II. Springer–Verlag, Berlin, 1991.With a foreword by K. Chandrasekharan.

15. Zhang Y. Bounded gaps between primes. 2014. Ann. of Math, SECOND SERIES, Vol. 179, No. 3, pp. 1121–1174.

16. Elliott P. D. T. A. and Halberstam H. 1970. A conjecture in prime number theory. In Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69). Academic Press, London, pp.59–72.