МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.956.6
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-5-14

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ СМЕЩЕНИЯМИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ОБЛАСТИ

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE TYPE OF THE TRICOMI PROBLEM FOR A MIXED SECOND-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH THREE DISPLACEMENTS IN THE HYPERBOLIC PART OF THE DOMAIN

Ж.А. Балкизов
Zh.A. Balkizov

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия , 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89-А

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
Russia, 89-A Shortanova, Nalchik, 360000

E-mail: Giraslan@yandex.ru

Аннотация
В данной работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация производных от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа с переменными коэффициентами. При определенном условии на коэффициенты, входящие в постановку задачи, решение исследуемой задачи выписано в явном виде. Показано, что при нарушении указанного условия на коэффициенты, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции.

Abstract
In this paper we study a boundary-value problem with a displacement for a nonhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic type of the second order with a wave operator in the hyperbolicity region when the linear combination of the derivatives of the values of the desired function on two characteristics and on the line of change of type with variable coefficients is given as the boundary condition. Under a certain condition, the solution of the problem under study is explicitly written down on the coefficients in the statement of the problem. It is shown that if the above condition is violated by the coefficients, the homogeneous problem corresponding to the problem under study 1 has an infinite number of linearly independent solutions, and the solution set of the corresponding nonhomogeneous problem can exist only under an additional requirement on the given functions

Ключевые слова: краевая задача со смещением, уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, существование и единственность решения задачи.

Keywords: boundary-value problem with displacement, equation of mixed parabolic-hyperbolic type, existence and uniqueness of the solution of the problem.

Введение

Впервые краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, когда в гиперболической части границы области задана линейная комбинация значений искомой функции на двух независимых характеристиках, была сформулирована и исследована в работе Жегалова [1962]. В работах Нахушева [1969(A), (B)] было введено понятие краевой задачи со смещением и исследованы ряд нелокальных краевых задач с разными смещениями для строго гиперболических, вырождающихся гиперболических, а также смешанного типа уравнений. В отличие от задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в задачах со смещением задается нелокальное условие, связывающее значение искомого решения или его производной, вообще говоря, дробного порядка в трех точках, две из которых лежат на граничных характеристиках из разных семейств, а третья – на линии вырождения или линии изменения типа уравнения.

В монографии Нахушева [2006] отмечено, что проблема поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной, приводит к нелокальным краевым задачам со смещением. Частными случаями задач со смещением являются такие нелокальные задачи, как задача Бицадзе-Самарского [Бицадзе, Самарский, 1969], задача Дезина [Dezin, 1969], задача Карлемана [Carleman, 1932], задача Стеклова [Стеклов, 1983, с. 67], задача Франкля [Бицадзе, 1981, с. 339], и т.д.

В настоящее время исследованию краевых задач со смещением для различных типов и различных порядков уравнений уделяют внимание много авторов. В первую очередь это связано с применением их при исследовании задач биологической синергетики, трансзвуковой газовой динамики. Подобные граничные условия возникают также при изучении вопросов тепло- и массообмена в капиллярно-пористых средах, математическом моделировании задач газовой динамики и нелокальных физических процессов, изучении процессов размножения клеток, в теории распространения электромагнитного поля в неоднородной среде [Берс, 1961], [Нахушев, 1995], [Франкль, 1951]. Достаточно полная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями, приведены в монографиях Нахушева [2006, 2011], Бицадзе [1981], Жегалова и Миронова [2001], Кальменова [1993], Репина [1992(B)], Салахитдинова и Уринова [1997], а также в диссертациях Нахушева [1970], Жегалова [1988], Репина [1998].

В данной работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация производных от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа с переменными коэффициентами. При определенном условии на коэффициенты, входящие в постановку задачи, решение исследуемой задачи выписано в явном виде. Показано, что при нарушении указанного условия на коэффициенты, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции. Среди работ, близко примыкающих к исследуемой, отметим работы Репина [1992(A)], Килбас и Репина [1998], Репина и Ефимовой [2002, 2004], Мирсабурова и Чориевой [2016], Ефимовой [2005], Балкизова [2018].

Постановка задачи и критерий ее однозначной разрешимости

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$f=\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}, & y<0, \\ u_{xx}-u_{y}, & y>0, \end{cases} \quad (1)$$

где $f=f(x,y)$ – заданная функция, $u=u(x,y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) при $y>0$ совпадает с уравнением теплопроводности

$$u_{xx}-u_{y}=f\,, \quad (2)$$

а при $y<0$ совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx}-u_{yy}=f\,. \quad (3)$$

Уравнение (1) рассматривается в области Ω, ограниченной характеристиками $AC:\ x+y=0$ и $CB:\ x-y=r$, уравнения (3) при $y<0$, выходящими из точки $C=(r/2,-r/2)$ и проходящими через точки $A=(0,0)$ и $B=(r,0)$ соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках A, B, $A_0=(0,h)$, $B_0=(r,h)$, $h>0$, при $y>0$. Обозначим $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y>0\}$, $J=\{(x,0):\ 0<x<r\}$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$ и будем считать, что $f\in C(\overline{\Omega})$.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u=u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1)\cap C_x^2(\Omega_2)$, $u_x,\ u_y\in L_1(J)$, удовлетворяющую уравнению (1).

В работе исследуется следующая задача:

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u=u(x,y)$ *уравнения (1), удовлетворяющее на линиях* AA_0, BB_0, AC, BC *и* AB *внутренне краевым условиям*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u(r,y)=\varphi_2(y), 0\le y<h, \quad (4)$$

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]+\beta(x)\frac{d}{dx}u[\theta_r(x)]+\gamma(x)u_x(x,0)+\delta(x)u_y(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<r, \quad (5)$$

где $\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2};-\frac{x}{2}\right)$, $\theta_r(x)=\left(\frac{x+r}{2};\frac{x-r}{2}\right)$ *– аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (3), выходящих из точки* $(x,0)$, *с характеристиками* AC *и* BC *соответственно;* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)\in C[0,h]$; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$, $\psi(x)\in C^1[0,r]\cap C^2]0,r[$ *– заданные функции.*

Справедлива

Теорема. *Для существования единственного регулярного в области* Ω *решения задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы относительно коэффициентов* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ *и* $\delta(x)$ *имело место неравенство:*

$$[\beta(x)+\alpha(x)+\gamma(x)]^2+[\beta(x)-\alpha(x)+\delta(x)]^2\neq 0\quad \forall\, x\in[0,r]. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть относительно коэффициентов $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ выполнено условие (6), и пусть

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le r\,; \quad (7)$$

$$u_y(x,0)=\nu(x), \quad 0<x<r. \tag{8}$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, с учетом обозначений (7)-(8) получим первое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию $y=0$:

$$\nu(x)=\tau''(x)+f(x,0), \tag{9}$$

а из (4) – с учетом (7) при предельном переходе при $y\to+0$ имеем

$$\tau(0)=\varphi_1(0), \quad \tau(r)=\varphi_2(0). \tag{10}$$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y=0$.

Решение задачи (7)-(8) для уравнения (3) в области Ω_1 дается по формуле Даламбера [Тихонов, Самарский, 1977, с. 59]:

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^y\int_{x-y+t}^{x+y-t}f(s,t)ds\,dt. \tag{11}$$

Из формулы (11) находим:

$$\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]=\frac{1}{2}\left(\tau'(x)-\nu(x)+\int_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt\right),$$

$$\frac{d}{dx}u[\theta_r(x)]=\frac{1}{2}\left(\tau'(x)+\nu(x)-\int_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt\right),$$

при подстановке которых в условие (5), приходим к равенству

$$[\beta(x)+\alpha(x)+\gamma(x)]\tau'(x)+[\beta(x)-\alpha(x)+\delta(x)]\nu(x)=$$
$$=2\psi(x)-\alpha(x)\int_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt+\beta(x)\int_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt. \tag{12}$$

Формула (12) и есть искомое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_1 области Ω на линию изменения типа $y=0$.

При $\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)\equiv 0 \ \forall\, x\in[0,r]$ из (12) приходим к равенству:

$$\tau'(x)=\frac{2\psi(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}-\frac{\beta(x)+\delta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}\int_{-x/2}^{0}f(x+t,t)dt+$$
$$+\frac{\beta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}\int_{(x-r)/2}^{0}f(x-t,t)dt,$$

откуда с учетом (10) находим

$$\tau(x)=\varphi_1(0)+\int_0^x\frac{2\psi(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)}dt-\int_0^x\frac{\beta(t)+\delta(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)}\int_{-t/2}^{0}f(t+s,s)ds\,dt+$$
$$+\int_0^x\frac{\beta(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)}\int_{(t-r)/2}^{0}f(t-s,s)ds\,dt, \tag{13}$$

причем должно быть выполнено условие согласования:

$$\int_0^r \frac{2\psi(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)}dt-\int_0^r \frac{\beta(t)+\delta(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)}\int_{-t/2}^{0} f(t+s,s)ds\,dt+$$

$$+\int_0^r \frac{\beta(t)}{2\beta(t)+\gamma(t)+\delta(t)}\int_{(t-r)/2}^{0} f(t-s,s)ds\,dt=\varphi_2(0)-\varphi_1(0).$$

Из (13) и (9) заключаем, что

$$\nu(x)= f(x,0)+\left[\frac{2\psi(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}\right]^/-\left[\frac{\beta(x)+\delta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}\right]^/\int_{-x/2}^{0} f(x+t,t)dt+$$

$$+\left[\frac{\beta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}\right]^/\int_{(x-r)/2}^{0} f(x-t,t)dt-\frac{1}{2}\frac{[\beta(x)+\delta(x)]\,f[\theta_0(x)]+\beta(x)\,f[\theta_r(x)]}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}. \quad (14)$$

А при $\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)\equiv 0\ \ \forall\ x\in[0,r]$ из соотношений (9), (10) и (12) находим:

$$\nu(x)=\frac{2\psi(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}+\frac{\beta(x)+\gamma(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}\int_{-x/2}^{0} f(x+t,t)dt+$$

$$+\frac{\beta(x)}{2\beta(x)+\gamma(x)+\delta(x)}\int_{(x-r)/2}^{0} f(x-t,t)dt, \quad (15)$$

$$\tau(x)=\left(1-\frac{x}{r}\right)\varphi_1(0)+\frac{x}{r}\varphi_2(0)-\frac{x}{r}\int_0^r (r-t)[\nu(t)-f(t,0)]dt+\int_0^x (x-t)[\nu(t)-f(t,0)]dt. \quad (16)$$

Если же $[\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)][\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)]\neq 0\ \ \forall\ x\in[0,r]$, то в этом случае из (12) приходим к равенству:

$$\nu(x)=\frac{\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}\tau'(x)-\frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}+$$

$$+\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}\int_{-x/2}^{0} f(x+t,t)dt-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}\int_{(x-r)/2}^{0} f(x-t,t)dt. \quad (17)$$

Исключая из соотношений (9) и (17) функцию $\nu(x)$, относительно искомой функции $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\tau''(x)-p(x)\tau'(x)=g(x),\ 0<x<r, \quad (18)$$

удовлетворяющего условиями (10). В уравнении (18):

$$p(x)=\frac{\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)};\quad g(x)=\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}\int_{-x/2}^{0} f(x+t,t)dt-$$

$$-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}\int\limits_{(x-r)/2}^{0} f(x-t,t)dt-\frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)-\delta(x)}-f(x,0).$$

Решение задач (18), (10) дается формулой:

$$\tau(x)=\int\limits_0^x \exp\left(\int\limits_0^t p(s)ds\right)\int\limits_0^t g(s)\exp\left(-\int\limits_0^s p(\xi)d\xi\right)ds\,dt+\varphi_1(0)+$$

$$+\frac{\int\limits_0^x \exp\left(\int\limits_0^t p(s)ds\right)dt}{\int\limits_0^r \exp\left(\int\limits_0^t p(s)ds\right)dt}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)-\int\limits_0^r \exp\left(\int\limits_0^t p(s)ds\right)\int\limits_0^t g(s)\exp\left(-\int\limits_0^s p(\xi)d\xi\right)ds\,dt\right]. \quad (19)$$

Функцию $\nu(x)$ при этом легко найти из фундаментальных соотношений (9) или (17).

Итак, если относительно коэффициентов $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ выполнено условие (6), то значения искомых функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ находятся и выписываются однозначно по одной из пар формул (13), (14); (15), (16); (17), (19). После того, как функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ найдены, решение задачи 1 в области Ω_1 определяется как решение задачи (7)-(8) для уравнения (3) и выписывается по формуле (11), а в области Ω_2 приходим к задаче нахождения регулярного решения первой краевой задачи для уравнения (2) с граничными условиями (4) и начальным условием $u(x,0)=\tau(x)$, решение которой выписано, например, в работе Нахушева [1995, с. 268].

Пусть теперь нарушено условие (6), то есть имеет место равенство

$$[\alpha(x)+\beta(x)+\gamma(x)]^2+[\beta(x)-\alpha(x)+\delta(x)]^2=0 \quad \forall x\in[0,r]. \quad (20)$$

Равенство (20) будет иметь место, например, если $\alpha(x)=\dfrac{\delta(x)-\gamma(x)}{2}$, а $\beta(x)=-\dfrac{\delta(x)+\gamma(x)}{2}$. В этом случае однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений вида:

$$2u(x,y)=\begin{cases} q'(x+y)-q'(x-y)+q(x+y)+q(x-y), & y<0,\\ 2\int\limits_0^r G(x,y;s,0)q(s)ds, & y>0,\end{cases}$$

где $q(x)$ – произвольная функция из класса $C^1[0,r]\cap C^3]0,r[$, а $G(x,y;s,t)$ – это функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. А решение исследуемой неоднородной задачи 1 при выполнении равенства (20) будет существовать тогда и только тогда, когда относительно заданных функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$, $f(x,y)$ будет выполнено дополнительное требование:

$$2\psi(x)=\alpha(x)\int\limits_{-x/2}^{0} f(x+t,t)dt-\beta(x)\int\limits_{(x-r)/2}^{0} f(x-t,t)dt. \quad (21)$$

При соблюдении условия (21) множество решений задачи 1 в области Ω_1 будет выписываться по формуле:

$$u(x,y)=\frac{q'(x+y)-q'(x-y)}{2}+\frac{q(x+y)+q(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} f(t,0)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x-y+t}^{x+y-t} f(s,t)ds\,dt,$$

а в области Ω_2 для совокупности регулярных решений задачи 1 будет иметь место представление

$$u(x,y)=\int\limits_0^y G_s(x,y;0,t)\varphi_1(t)dt-\int\limits_0^y G_s(x,y;r,t)\varphi_2(t)dt+$$
$$+\int\limits_0^r G(x,y;s,0)q(s)ds-\int\limits_0^y\int\limits_0^r G(x,y;s,t)f(s,t)ds\,dt.$$

Таким образом, условие (6) является необходимым и достаточным для существования единственного регулярного в области Ω решения задачи 1.

Заключение

В работе исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве граничного условия задана линейная комбинация производных от значений искомой функции на двух независимых характеристиках и на линии изменения типа с переменными коэффициентами. Найдено необходимое и достаточное условие на заданные функции, обеспечивающее единственность и существование регулярного решения задачи. Показано, что при нарушении указанного условия, однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 1, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а множество решений соответствующей неоднородной задачи может существовать только при дополнительном требовании на заданные функции. При определенных условиях на коэффициенты, входящие в постановку задачи, решение выписано в явном виде.

Список литературы
References

1. Балкизов Ж.А. 2018. Краевая задача со смещением для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. № 3(23): 19-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26.

Balkizov ZH.A. 2018. Krayevaya zadacha so smeshcheniyem dlya model'nogo uravneniya parabolo-giperbolicheskogo tipa tret'yego poryadka. [A boundary value problem with displacement for a model equation of a parabolic-hyperbolic type of the third order] Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki. № 3(23): 19-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26 (in Russian)

2. Берс Л. 1961. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Иностранная литература, 208 с.

Bers L. 1961. Matematicheskiye voprosy dozvukovoy i okolozvukovoy gazovoy dinamiki. [Mathematical problems of subsonic and transonic gas dynamics] M.: Inostrannaya literatura, 208 p. (in Russian)

3. Бицадзе А.В., Самарский А.А. 1969. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. Доклады академии наук СССР. Т. 185, № 4: 739-740.

Bitsadze A.V., Samarskiy A.A. 1969. O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh krayevykh zadach. [Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems] Doklady akademii nauk SSSR. T. 185, № 4: 739-740. (in Russian)

4. Бицадзе А.В. 1981. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 448 с.

Bitsadze A.V. 1981. Nekotoryye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh. [Some classes of partial differential equations] M.: Nauka, 448 p. (in Russian)

5. Ефимова С.В., Репин О.А. 2004. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса. Дифференц. уравнения. Т.40, №10: 1419–1422.

Yefimova C.V., Repin O.A. 2004. Zadacha s nelokal'nymi usloviyami na kharakteristikakh dlya uravneniya vlagoperenosa. [A problem with nonlocal conditions on characteristics for the moisture transfer equation] Differents. uravneniya. T.40, №10: 1419–1422. (in Russian)

6. Ефимова С.В. 2005. Нелокальная задача для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки, Выпуск 34: 194-196.

Yefimova S.V. 2005. Nelokal'naya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya, vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti. [A nonlocal problem for a hyperbolic equation that degenerates inside the domain] Vestnik SamGTU. Seriya fiz.-mat. nauki, Vypusk 34: 194-196. (in Russian)

7. Жегалов В.И. 1962. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на линии перехода. Ученые записки Казанского университета. Т. 122, Книга 3: 3-16.

Zhegalov V.I. 1962. Krayevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s granichnymi usloviyami na obeikh kharakteristikakh i s razryvami na linii perekhoda. [A boundary-value problem for an equation of mixed type with boundary conditions on both characteristics and with discontinuities on the transition curve] Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. T. 122, Kniga 3: 3-16. (in Russian)

8. Жегалов В.И. 1988. Исследование краевых задач со смещением для уравнений смешанного типа. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Новосибирск.

Zhegalov V.I. 1988. Issledovaniye krayevykh zadach so smeshcheniyem dlya uravneniy smeshannogo tipa. [Investigation of boundary-value problems with displacement for equations of mixed type] Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk. Novosibirsk. (in Russian)

9. Жегалов В.И., Миронов А.Н. 2001. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское математическое общество: 226 с.

Zhegalov V.I., Mironov A.N. 2001. Differentsial'nyye uravneniya so starshimi chastnymi proizvodnymi. [Differential equations with higher partial derivatives] Kazan': Kazanskoye matematicheskoye obshchestvo: 226 p. (in Russian)

10. Кальменов Т.Ш. 1993. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылая, 328 с.

Kal'menov T.SH. 1993. Krayevyye zadachi dlya lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh giperbolicheskogo tipa. [Boundary value problems for linear partial differential equations of hyperbolic type] Shymkent: Gylaya, 328 p. (in Russian)

11. Килбас А.А., Репин О.А. 1998. Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения. Дифференц. уравнения, Т.34, №6: 799-805.

Kilbas A.A., Repin O.A. 1998. Zadacha so smeshcheniyem dlya parabolo-giperbolicheskogo uravneniya. [A problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation] Differents. uravneniya, V.34, №6: 799-805. (in Russian)

12. Мирсабуров М., Чориева С.Т. 2016. О задаче с тремя вариантами смещений для уравнения смешанного типа. Известия ВУЗов. Математика, №4: 32-45.

Mirsaburov M., Choriyeva S.T. 2016. O zadache s tremya variantami smeshcheniy dlya uravneniya smeshannogo tipa. [On a problem with three variants of displacements for an equation of mixed type] Izvestiya VUZov. Matematika, №4: 32-45. (in Russian)

13. Нахушев А.М. 1969(A). Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения. Доклады академии наук СССР. Т.187, № 4: 736-739.

Nakhushev A.M. 1969(A). Novaya krayevaya zadacha dlya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya. [A new boundary value problem for a certain degenerate hyperbolic equation] Doklady akademii nauk SSSR. V.187, № 4: 736-739. (in Russian)

14. Нахушев А.М. 1969(B). О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дифференц. Уравнения. Т. 5, № 1: 44-59.

Nakhushev A.M. 1969(B). O nekotorykh krayevykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy i uravneniy smeshannogo tipa. [Certain boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type] Differents. uravneniya. V. 5, № 1: 44-59. (in Russian)

15. Нахушев А.М. 1970. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Новосибирск, 172 с.

Nakhushev A.M. 1970. K teorii lineynykh krayevykh zadach dlya giperbolicheskikh i smeshannykh uravneniy vtorogo poryadka. [To the theory of linear boundary value problems for hyperbolic and mixed second-order equations] Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk. Novosibirsk, 172 p. (in Russian)

16. Нахушев А.М. 1995. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 301 с.

Nakhushev A.M. 1995. Uravneniya matematicheskoy biologii. [Equations of mathematical biology] M.: Vysshaya shkola, 301 p. (in Russian)

17. Нахушев А.М. 2006. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 287 с.

Nakhushev A.M. 2006. Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh. [Problems with displacement for partial differential equations] M.: Nauka, 287 p. (in Russian)

18. Нахушева З.А. 2011. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: КБНЦ РАН, 196 с.

Nakhusheva Z.A. 2011. Nelokal'nyye krayevyye zadachi dlya osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravneniy. [Nonlocal boundary-value problems for basic and mixed types of differential equations] Nal'chik: KBNTS RAN, 196 p. (in Russian)

19. Репин О.А. 1992(A). Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа. Дифференц. уравнения, Т.28, №1: 173-176.

Repin O.A. 1992(A). Nelokal'naya krayevaya zadacha dlya parabolo-giperbolicheskogo uravneniya s kharakteristicheskoy liniyey izmeneniya tipa. [Nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a characteristic line of type change] Differents. uravneniya, V.28, №1: 173-176. (in Russian)

20. Репин О.А. 1992(B). Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: издательство Самарского филиала Саратовского университета, 162 с.

Repin O.A. 1992(B). Krayevyye zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipov. [Boundary-value problems for hyperbolic and mixed-type equations] Samara: izdatel'stvo Samarskogo filiala Saratovskogo universiteta, 162 p. (in Russian)

21. Репин О.А. 1998. Краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов и дробное интегро-дифференцирование. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Минск.

Repin O.A. 1998. Krayevyye zadachi dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipov i drobnoye integro-differentsirovaniye. [Boundary value problems for equations of hyperbolic and mixed types and fractional integro-differentiation] Dissertatsiya na soiskaniye uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk. Minsk. (in Russian)

22. Репин О.А., Ефимова С.В. 2002. Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. Выпуск 16: 10-14.

Repin O.A., Yefimova S.V. 2002. Nelokal'naya krayevaya zadacha dlya parabolo-giperbolicheskogo uravneniya s nekharakteristicheskoy liniyey izmeneniya tipa. [A nonlocal boundary value problem for a parabolic hyperbolic equation with a noncharacteristic line of change of type] Vestnik SamGTU. Seriya fiz.-mat. nauki. Vypusk 16: 10-14. (in Russian)

23. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. 1997. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН., 165 с.

Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. 1997. Krayevyye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom. [Boundary value problems for equations of mixed type with a spectral parameter] Tashkent: FAN., 165 p. (in Russian)

24. Стеклов В.А. 1983. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 432 с.

Steklov V.A. 1983. Osnovnyye zadachi matematicheskoy fiziki. [Basic problems of mathematical physics] M.: Nauka, 432 p. (in Russian)

25. Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1977. Уравнения математической физики. М.: Наука, 736 с.

Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. 1977. Uravneniya matematicheskoy fiziki. [Equations of mathematical physics] M.: Nauka, 736 p. (in Russian)

26. Франкль Ф.И. 1951. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе. Вестник ЛГУ. Серия математика, механика и астрономия. Т.6. № 11: 3 - 7.

Frankl' F.I. 1951. Dva gazodinamicheskikh prilozheniya krayevoy zadachi Lavrent'yeva-Bitsadze. [Two gas-dynamic applications of the boundary value problem of Lavrentiev-Bitsadze] Vestnik LGU. Seriya matematika, mekhanika i astronomiya. V.6, № 11: 3 - 7. (in Russian)

27. Carleman T. 1932. Sur la théorie des equations integrales et ses applications. Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich, 7: 138-151.

28. Dezin A.A. 1963. On the solvable extensions of partial differential operators. Outlines of the Joint Soviet-American symposium on partial differential equation. Novosibirsk: 65-66.