УДК 514.742.24

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ON POSSIBILITY OF VECTOR PRODUCT DETERMINATION OF TWO VECTORS IN MULTIDIMENSIONAL SPACE

И.П. Попов
I.P. Popov

Курганский государственный университет, Россия, 640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4

Kurgan state university, 63/4 Sovetskaja St, Kurgan, 640020, Russia

E-mail: ip.popow@yandex.ru

Аннотация

Целью работы является определение векторного произведения двух векторов c = [a, b] в n-мерном евклидовом пространстве при n > 3, которое удовлетворяет общепринятому инвариантному определению, в соответствии с которым оно является вектором, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, его направление перпендикулярно обоим векторам и векторы a, b и c образуют правую тройку векторов. В работе применяются ортонормированные базисы. Доказывается, что для двух линейно независимых векторов a и b в Rn существует их векторное произведение. Вводится понятие m-расщепления и симметричного m-расщепления базисных векторов, под которыми понимается трансформация Rn в Rn+m–1 путем замены ei на m векторов $\mathbf{e}_{i1},\ldots,\mathbf{e}_{ij},\ldots,\mathbf{e}_{im}$, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса. Решается некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в Rn. Устанавливается условие, в соответствии с которым векторное произведение c = [a, b] в Rn лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на (n – 2)-плоскость, перпендикулярную векторам a и b.

Abstract

The aim of the paper is to define the vector product of two vectors c = [a, b] in n-dimensional Euclidean space for n > 3. Orthonormal bases are used in this paper. It is proved that for two linearly independent vectors a and b in Rn exists their vector product. We introduce the notion of m-splitting and symmetric m-splitting of basis vectors, by which is meant a transformation Rn in Rn+m–1 by replacing ei by m vectors $\mathbf{e}_{i1},\ldots,\mathbf{e}_{ij},\ldots,\mathbf{e}_{im}$ orthogonal to each other and to all other basis vectors of the original basis. The inverse problem is solved in some way – for a known vector product the definition of the coordinates of all three vectors in Rn. A condition is established in accordance with which the vector product c = [a, b] in Rn lies on one line with the projection of the sum of the basis vectors to the (n – 2)-plane perpendicular to the vectors a and b.

Ключевые слова: векторное произведение, многомерное пространство, базис, расщепление.

Keywords: vector product, multidimensional space, basis, splitting.

Целью работы является установление векторного произведения двух векторов c = [a, b] в n-мерном евклидовом пространстве при n > 3, которое, безусловно, удовлетворяет общепринятому инвариантному определению, в соответствии с которым оно является вектором, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах a и b, его направление перпендикулярно обоим векторам и векторы a, b и c образуют правую тройку векторов.

Далее применяются ортонормированные базисы [1].

Теорема существования

Теорема 1. Для двух линейно независимых векторов a и b в Rn существует их векторное произведение c = [a, b].

Доказательство. Три линейно независимых вектора a, b и g имеют инвариантное описание, включающее в себя длины векторов, углы между ними и их взаимную ориентацию. Для каждого из этих трех векторов однозначно определена их проекция на любой другой вектор. Другими словами, определены их попарные скалярные произведения.

В этой связи векторы a, b и g могут иметь однозначное координатное описание в базисах любой размерности, начиная с 3 (пассивная точка зрения (alias)). При координатном описании они сохраняют размеры, углы между ними и взаимную ориентацию, поскольку в базисе любой размерности их попарные скалярные произведения остаются неизменными. Другими словами, координатное описание той или иной размерности при пассивной точке зрения не меняет сущность векторов и их отношений друг к другу. Следовательно, если в качестве вектора g рассматривать вектор c, являющийся при инвариантном описании векторным произведением векторов a и b, то его сущность в этом качестве не изменится при координатном описании в Rn. Теорема доказана.

Расщепление базисных векторов

Определение 1. m-расщеплением базисного вектора ei является трансформация Rn в Rn+m–1 путем замены ei на m векторов $\mathbf{e}_{i1},\dots,\mathbf{e}_{ij},\dots,\mathbf{e}_{im}$, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса, при этом

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\mathbf{e}_{ij},$$

где kij – направляющие косинусы ei в базисе $\mathbf{e}_{i1},\dots,\mathbf{e}_{ij},\dots,\mathbf{e}_{im}$.

Выбор направляющих косинусов kij может быть сопряжен с произволом. Произвол минимизируется при симметричном m-расщеплении.

Определение 2. Симметричное m-расщепление базисного вектора – это m-расщепление, при котором

$$\forall j \in [1, m] \left| k_{ij} = \frac{\left|\sqrt{m}\right|}{m} \right..$$

Представление векторного произведения двух векторов в Rn

Теорема 2. Векторное произведение c = [a, b] может быть представлено в Rn.

Доказательство. Пусть в R3 имеются два линейно независимых вектора a и b. Их координаты равны

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для векторов a и b в R3 определено векторное произведение c = [a, b].

Его координаты равны

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному (n – 2)-расщеплению. В образовавшемся Rn (в базисе ${}^1\mathbf{e}_1, {}^1\mathbf{e}_2, \ldots, {}^1\mathbf{e}_n$) имеют место все три вектора (пассивная точка зрения), координаты которых, соответственно, равны

$$^1a = \begin{pmatrix} ^1a_1 \\ ^1a_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \quad ^1b = \begin{pmatrix} ^1b_1 \\ ^1b_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \quad ^1c = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ ^1c_3 \\ \vdots \\ ^1c_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Здесь

$$\forall i \in [3, n] \Big| \ ^1c_i = \frac{\left|\sqrt{n-2}\right|}{n-2} c_3.$$

Произвольная квадратная матрица отображения T [2] позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности ${}^2\mathbf{e}_1, {}^2\mathbf{e}_2, \ldots, {}^2\mathbf{e}_n$.

$$^2a = T \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} ^2a_1 \\ \vdots \\ ^2a_n \end{pmatrix}, \quad ^2b = T \cdot {}^1b = \begin{pmatrix} ^2b_1 \\ \vdots \\ ^2b_n \end{pmatrix}, \quad ^2c = T \cdot {}^1c = \begin{pmatrix} ^2c_1 \\ \vdots \\ ^2c_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Таким образом, в произвольном базисе ${}^2\mathbf{e}_1, {}^2\mathbf{e}_2, \ldots, {}^2\mathbf{e}_n$ для двух векторов a и b имеет место их векторное произведение c = [a, b] с координатами (2). Теорема доказана.

Тем самым решена некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в Rn.

Пример 1. Найти векторное апризведение двух векторов в R4 путем преобразования трехмерного базиса в четырехмерный.

В трехмерном базисе координаты векторов a и b равны

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Координаты векторного произведения c = [a, b] равны

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному 2-расщеплению. В образовавшемся R4 координаты векторов равны

$${}^1a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^1b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^1c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,071 \\ 7,071 \end{pmatrix}.$$

Произвольная квадратная матрица отображения

$$T = \begin{pmatrix} 0,497 & 0,628 & 0,287 & -0,527 \\ 0,47 & 0,22 & -0,814 & 0,262 \\ -0,171 & 0,604 & 0,296 & 0,72 \\ 0,709 & -0,439 & 0,41 & 0,369 \end{pmatrix}$$

позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности

$${}^2a = T \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} 2,876 \\ 1,599 \\ 1,47 \\ 0,101 \end{pmatrix}, \quad {}^2b = T \cdot {}^1b = \begin{pmatrix} 3,138 \\ 1,099 \\ 3,02 \\ -2,197 \end{pmatrix}, \quad {}^2c = T \cdot {}^1c = \begin{pmatrix} -1,695 \\ -3,902 \\ 7,184 \\ 5,503 \end{pmatrix}.$$

Здесь c = [a, b].

Ориентация векторного произведения

В R3 вектор c = [a, b] лежит на линии пересечения плоскостей, нормалями которых являются векторы a и b или в терминах многомерного пространства – в 1-плоскости, образованной пересечением двух 2-плоскостей. В этой 1-плоскости можно построить два противоположно направленных вектора, величина которых равна модулю векторного произведения, и ортогональных векторам a и b. Формально концы этих векторов образуют в 1-плоскости 0-сферу.

В R4 векторы a и b служат нормалями двум 3-плоскостям, пересечением которых является 2-плоскость, все векторы которой ортогональны векторам a и b. Концы векторов, величина которых равна модулю векторного произведения, образуют в этой 2-плоскости 1-сферу (окружность).

В Rn векторы a и b служат нормалями двум (n – 1)-плоскостям, пересечением которых является (n – 2)-плоскость. Концы векторов, величина которых равна модулю векторного произведения, и ортогональных векторам a и b, образуют в этой (n – 2)-плоскости (n – 3)-сферу.

И в R3 и в Rn имеет место неоднозначность при выборе направления векторного произведения двух векторов. В R3 приходится выбирать из векторов, ограниченных 0-сферой, в Rn – из векторов, ограниченных (n – 3)-сферой.

В R3 неоднозначность преодолевается постулированием – в качестве направления c выбирается вектор правый относительно a и b.

Неоднозначность в Rn может быть преодолена также, как и в R3 – выбором одного наиболее подходящего варианта.

По аналогии с взаимным расположением вектора c и вектора, являющегося суммой базисных ортов, имеющем место для частного случая (1), для произвольного базиса можно принять следующее

Условие 1. Векторное произведение c = [a, b] в Rn лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на (n – 2)-плоскость, перпендикулярную векторам a и b.

Векторное произведение в R3 формально удовлетворяет условию 1.

Повороты координатных 2-плоскостей

Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ вектор d имеет координаты d.

Повороту ij-й координатной 2-плоскости соответствует следующая матрица перехода

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1i} & \cdots & 0_{1j} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 1_{22} & \cdots & 0_{2i} & \cdots & 0_{2j} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{i1} & 0_{i2} & \cdots & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \cdots & 0_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{j1} & 0_{j2} & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \cdots & 0_{ni} & \cdots & 0_{nj} & \cdots & 1_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

При этом cosφ и sinφ находятся из условия

$d_i \cos\varphi + d_j \sin\varphi = {}^1d_i$,

$-d_i \sin\varphi + d_j \cos\varphi = {}^1d_j$.

${}^1d_j = 0$, если $\cos\varphi = \dfrac{d_i}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{d_j}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}$.

При этом

$$ {}^{1}d_i = \sqrt{d_i^2 + d_j^2} \,. $$

Все другие координаты остаются без изменения.

Таким образом, поворотом ij-й координатной 2-плоскости в соответствии с матрицей перехода Tij можно изменять координаты i и j вектора d, например, обнулять координату j.

Определение векторного произведения двух векторов в Rn

Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ векторы a и b имеют координаты

$$ a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. $$

Координаты суммы базисных ортов s равны

$$ s = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. $$

Для перехода к новому базису ${}^{*}\mathbf{e}_1, {}^{*}\mathbf{e}_2, \dots, {}^{*}\mathbf{e}_n$, в котором векторы a, b и s будут иметь координаты

$$ {}^{*}a = \begin{pmatrix} {}^{*}a_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \quad {}^{*}b = \begin{pmatrix} {}^{*}b_1 \\ {}^{*}b_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \quad {}^{*}s = \begin{pmatrix} {}^{*}s_1 \\ {}^{*}s_2 \\ {}^{*}s_3 \\ \vdots \\ {}^{*}s_n \end{pmatrix}, \quad \forall i \in [3, n] \Big| \; {}^{*}s_i = \frac{\sqrt{n - {}^{*}s_1^2 - {}^{*}s_2^2}}{n-2}, $$

следует выполнить 3n – h – l – 3 поворотов координатных 2-плоскостей. Здесь h – число ненулевых координат обоих векторов в новом базисе, l – число нулевых координат в исходном базисе. В рассматриваемом случае h = 3. Каждому повороту соответствует своя матрица Tk типа (3).

Матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ к базису ${}^{*}\mathbf{e}_1, {}^{*}\mathbf{e}_2, \dots, {}^{*}\mathbf{e}_n$ равна

$$ T = \prod_{k=3n-h-l-3}^{1} T_k \,, $$

т.е. перемножение производится в обратной последовательности. При этом

$$ {}^{*}a = Ta, \quad {}^{*}b = Tb, \quad {}^{*}s = Ts. $$

Координаты вектора c = [a, b] в новом базисе ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, \dots, {}^*\mathbf{e}_n$ в соответствии с условием 1 равны

$$ {}^*c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^*c_3 \\ \vdots \\ {}^*c_n \end{pmatrix}, \quad \forall i \in [3,n] \big| \; {}^*c_i = \frac{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{n-2}, \quad i \in [3,n]. \qquad (4) $$

Знак радикала в (4) выбирается таким образом, чтобы вектор c образовывал с a и b правую тройку векторов.

Координаты вектора c = [a, b] в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равны

$$ c = T^{-1} \cdot {}^*c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. $$

Замечание 1. Если $\forall i \in [3,n] \big| \; {}^*s_i = 0$, т.е. сумма базисных ортов s линейно зависима от векторов a и b, то их векторное произведение в соответствии с условием 1 неопределимо.

Пример 2. В R4 по известным значениям a и b отыскать c = [a, b].

$$ a = \begin{pmatrix} 3,37 \\ 2,762 \\ -2,395 \\ -0,532 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3,289 \\ 1,539 \\ -5,697 \\ 1,834 \end{pmatrix}. $$

$$ T_1 = \begin{pmatrix} 0,815 & 0 & -0,579 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,579 & 0 & 0,815 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^1a = T_1 a = \begin{pmatrix} 4,134 \\ 2,762 \\ 0 \\ -0,532 \end{pmatrix}. $$

$$ T_2 = \begin{pmatrix} 0,831 & 0,556 & 0 & 0 \\ -0,556 & 0,831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2a = T_2 \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} 4,972 \\ 0 \\ 0 \\ -0,532 \end{pmatrix}. $$

$$ T_3 = \begin{pmatrix} 0,994 & 0 & 0 & -0,106 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,106 & 0 & 0 & 0,994 \end{pmatrix}, \quad {}^3a = T_3 \cdot {}^2a = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

$$ T_{31} = T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,552 & -0,479 & -0,106 \\ -0,453 & 0,831 & 0,322 & 0 \\ 0,579 & 0 & 0,815 & 0 \\ 0,072 & 0,059 & -0,051 & 0,994 \end{pmatrix}, \quad {}^3b = T_{31} b = \begin{pmatrix} 5,6 \\ -2,043 \\ -2,738 \\ 2,443 \end{pmatrix}. $$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,641 & 0 & 0,767 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,767 & 0 & -0,641 \end{pmatrix}, \quad {}^4b = T_4 \cdot {}^3b = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 3,185 \\ -2,738 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,758 & -0,652 & 0 \\ 0 & 0,652 & 0,758 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^5b = T_5 \cdot {}^4b = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 4,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_{51} = T_5 T_4 T_{31} = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,552 & -0,479 & -0,106 \\ -0,115 & -0,37 & -0,718 & 0,578 \\ 0,665 & -0,318 & 0,458 & 0,497 \\ 0,301 & -0,676 & -0,214 & -0,638 \end{pmatrix}.$$

Сумма ортов исходного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ в базисе ${}^5\mathbf{e}_1, {}^5\mathbf{e}_2, {}^5\mathbf{e}_3, {}^5\mathbf{e}_4$ имеет координаты

$${}^5s = T_{51} s = T_{51} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,641 \\ -0,625 \\ 1,302 \\ -1,226 \end{pmatrix}.$$

$$T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0297 & -0,9996 \\ 0 & 0 & 0,9996 & 0,0297 \end{pmatrix}, \quad {}^6s = T_6 \cdot {}^5s = \begin{pmatrix} 0,641 \\ -0,625 \\ 1,265 \\ 1,265 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ к базису ${}^6\mathbf{e}_1, {}^6\mathbf{e}_2, {}^6\mathbf{e}_3, {}^6\mathbf{e}_4$ равна

$$T_{61} = T_6 T_{51} = T_6 T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,552 & -0,479 & -0,106 \\ -0,115 & -0,37 & -0,718 & 0,578 \\ -0,281 & 0,666 & 0,228 & 0,652 \\ 0,673 & -0,338 & 0,451 & 0,478 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$${}^6a = T_{61} a = {}^3a, \quad {}^6b = T_{61} b = {}^5b, \quad {}^6s = T_{61} s.$$

Координаты вектора c = [a, b] в последнем базисе ${}^6\mathbf{e}_1, {}^6\mathbf{e}_2, {}^6\mathbf{e}_3, {}^6\mathbf{e}_4$ в соответствии с (4) равны

$${}^6c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14,849 \\ 14,849 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора c = [a, b] в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ равны

$$c = T_{61}^{-1} \cdot {}^{6}c = \begin{pmatrix} 5,822 \\ 4,869 \\ 10,081 \\ 16,786 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Порядок обнуления координат и, следовательно, значения промежуточных матриц могут быть иными. При этом нетрудно убедиться, что итоговая матрица T (T61) и значение вектора c в исходном базисе не изменяются.

Список литературы

References

1. Попов И.П. 2017. Операторы типа набла: поверхностный, нулевой и мнимый нулевой. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. № 6(255), выпуск 46: 44–53.

Popov I.P. 2017. Operators type of nabla: surface, zero and zero imaginary. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. № 6(255), 46: 44–53.

2. Чурсанова А.С. 2017. Оценка собственных значений матриц. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. № 6(255), выпуск 46: 59–61.

Chursanova A.S. 2017. The estimate of matrix eigenvalues. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. № 6(255), 46: 59–61.