

**ДВУМЕРНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ
ИСТОЧНИКОМ, СОДЕРЖАЩИМ СТЕПЕНИ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

**TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATION WITH NONLINEAR
SOURCE CONTAINING POWERS OF FIRST DERIVATIVES**

И.В. Рахмелевич
I.V. Rakhmelevich

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Nizhny Novgorod State University, 23 Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация

Исследовано двумерное неавтономное эллиптическое уравнение с правой частью, содержащей произвольную нелинейность от искомой функции, и степенные нелинейности от ее первых производных. Получены решения этого уравнения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны, автомодельное и сферически симметричное решения. Сформулированы условия существования найденных решений. Исследована зависимость решений от параметров уравнения.

Abstract

There is investigated two-dimensional non-autonomous elliptic equation, right side of which contains the arbitrary nonlinearity on unknown function and power-law nonlinearities on its first derivatives. There are received the solutions of this equation with additive and multiplicative separation of variables, and also solutions of travelling wave type, self-similar and spherically symmetric solutions. The conditions of existence of founded solutions are formulated. The dependence of solutions on parameters of equation is investigated.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, эллиптическое уравнение, обыкновенное дифференциальное уравнение, разделение переменных, степенная нелинейность, решение типа бегущей волны, автомодельное решение.

Keywords: partial differential equation, elliptic equation, ordinary differential equation, separation of variables, power-law nonlinearity, solution of travelling wave type, self-similar solution.

Введение

Исследование дифференциальных уравнений в частных производных со степенными нелинейностями является важной частью современной нелинейной математической физики. Этой проблеме уделяется большое внимание как в справочниках и учебных пособиях [1,2], так и в оригинальных работах [3-7]. При этом особый интерес представляют нелинейные неавтономные уравнения, так как они описывают нелинейные явления в нестационарных и неоднородных системах. Настоящая работа посвящена изучению решений эллиптического уравнения с правой частью, явно зависящей от координат и содержащей произвольную нелинейность от искомой функции и произведение степенных функций от ее первых производных. Анализ решений данного уравнения проводится с помощью метода разделения переменных (РП), который широко используется при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1-9]. При этом находят условия существования полученных решений, которым должна удовлетворять правая часть уравнения.

Постановка задачи. Простейшие решения

Рассмотрим двумерное уравнение второго порядка эллиптического типа относительно неизвестной функции $u(x, y)$, с правой частью, включающей произвольную нелинейность по искомой функции и степенные нелинейности по ее первым производным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(u) f(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{\beta_2}. \quad (1.1)$$

Здесь β_1, β_2 – параметры уравнения, $g(u), f(x, y)$ – заданные функции (их вид будет уточняться в дальнейшем).

Теорема 1.1.

Пусть выполнены условия:

$$g(u) = g_0 \exp(\gamma u), \quad f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \quad (1.2)$$

1. Тогда при условии, что

$$f_2(y) = f_{20} (2a_2 y + b_2)^{-\beta_2} \exp[-\gamma(a_2 y^2 + b_2 y)] \quad (1.3a)$$

уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$u(x, y) = X(x) + a_2 y^2 + b_2 y + c_2, \quad (1.3b)$$

причём $X(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ):

$$X''(x) = g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} \exp[\gamma X(x)] - 2a_2, \quad (1.3в)$$

где коэффициент

$$g_1 = g_0 f_{20} \exp(\gamma c_2). \quad (1.3г)$$

2. Аналогично, при условии, что

$$f_1(x) = f_{10} (2a_1 x + b_1)^{-\beta_1} \exp[-\gamma(a_1 x^2 + b_1 x)] \quad (1.4а)$$

уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$u(x, y) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1 + Y(y), \quad (1.4б)$$

причём $Y(y)$ удовлетворяет следующему ОДУ:

$$Y''(y) = g_2 f_2(y) [Y'(y)]^{\beta_2} \exp[\gamma Y(y)] - 2a_1, \quad (1.4в)$$

где коэффициент

$$g_2 = g_0 f_{10} \exp(\gamma c_1). \quad (1.4г)$$

Доказательство.

1. Согласно известной схеме аддитивного РП [1,2], решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(x, y) = X(x) + Y(y). \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в уравнение (1.1) и учитывая условия (1.2), получаем:

$$X''(x) + Y''(y) = g_0 \varphi_1(x) \varphi_2(y), \quad (1.6)$$

где

$$\varphi_1(x) = f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} \exp[\gamma X(x)], \quad \varphi_2(y) = f_2(y) [Y'(y)]^{\beta_2} \exp[\gamma Y(y)]. \quad (1.6а)$$

Дифференцируя уравнение (1.6) по x , можно привести его к виду:

$$\frac{X'''(x)}{\varphi_1'(x)} = g_0 \varphi_2(y). \quad (1.7)$$

Так как левая часть (1.7) зависит только от x , а правая часть – только от y , то это уравнение можно удовлетворить, только если обе его части равны постоянной, откуда следует, что $\varphi_2(y) = \tilde{a}_2 = \text{const}$. Подставляя это выражение в (1.6), получаем:

$$Y''(y) = g_1 \varphi_1(x) - X''(x), \quad (1.8)$$

где $g_1 = g_0 \tilde{a}_2$. Аналогично (1.7), левая и правая части уравнения (1.8) зависят от разных переменных, и поэтому должны быть равны некоторой постоянной. Отсюда, с

учетом (1.6а), следует, что $X(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$X''(x) - g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} \exp[\gamma X(x)] = -2a_2, \quad (1.9)$$

а $Y(y)$ – переопределенной системе из двух уравнений:

$$[Y'(y)]^{\beta_2} \exp[\gamma Y(y)] = \tilde{a}_2 / f_2(y), \quad Y''(y) = 2a_2. \quad (1.10)$$

Из второго уравнения системы (1.10) находим, что $Y(y) = a_2 y^2 + b_2 y + c_2$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (1.10), получаем функцию $f_2(y)$:

$$f_2(y) = f_{20} (2a_2 y + b_2)^{-\beta_2} \exp[-\gamma(a_2 y^2 + b_2 y)], \quad (1.11)$$

где $f_{20} = \tilde{a}_2 \exp(-\gamma c_2)$. Выражая отсюда \tilde{a}_2 , получаем формулу (1.3г) для коэффициента g_1 . Из (1.9) и (1.11) следует, что первая часть теоремы доказана.

2. При доказательстве второй части теоремы уравнение (1.6) необходимо продифференцировать по Y , и затем применить процедуру разделения переменных. Проводя рассуждения, аналогичные первой части доказательства, получаем уравнение для $Y(y)$ и переопределенную систему уравнений для $X(x)$:

$$Y''(y) - g_2 f_2(y) [Y'(y)]^{\beta_2} \exp[\gamma Y(y)] = -2a_1, \quad (1.12)$$

$$[X'(x)]^{\beta_1} \exp[\gamma X(x)] = \tilde{a}_1 / f_1(x), \quad X''(x) = 2a_1. \quad (1.13)$$

Из второго уравнения системы (1.13) находим, что $X(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (1.13), получаем функцию $f_1(x)$:

$$f_1(x) = f_{10} (2a_1 x + b_1)^{-\beta_1} \exp[-\gamma(a_1 x^2 + b_1 x)], \quad (1.14)$$

где $f_{10} = \tilde{a}_1 \exp(-\gamma c_1)$. Выражая отсюда постоянную \tilde{a}_1 , получаем формулу (1.4г) для коэффициента g_2 . Из (1.12) и (1.14) следует, что вторая часть теоремы доказана.

Пример.

Пусть $\gamma = a_2 = 0$, $f_{20} = b_2^{\beta_2}$, $f_1(x) \equiv 1$. Тогда, из (1.2) и (1.3а) $g(u) \equiv g_0$, $f(x, y) \equiv 1$, т.е. в условиях данного примера уравнение (1.1) автономное и явно не зависит от искомой функции. Решение, определяемое теоремой 1.1, имеет вид $u(x, y) = X(x) + b_2 y + c_2$, где $X(x)$ определяется выражениями:

$$X(x) = \begin{cases} \frac{1}{g_1(2-\beta_1)} (g_1(1-\beta_1)x + c_1)^{\frac{2-\beta_1}{1-\beta_1}} + X_0 & \text{при } \beta_1 \neq 1, \beta_1 \neq 2 \\ a_1 \exp(g_1x) + X_0 & \text{при } \beta_1 = 1 \\ -\frac{1}{g_1} \ln|x-x_0| + X_0 & \text{при } \beta_1 = 2 \end{cases} .$$

Здесь a_1, c_1, x_0, X_0 - произвольные постоянные.

Теорема 1.2.

Пусть выполнены условия:

$$g(u) = g_0 u^\gamma, \quad f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \quad (1.15)$$

1. Тогда, при условии что

$$f_2(y) = f_{20}(y-y_0)^{1-\beta_1-\gamma} \quad (1.16a)$$

уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(x, y) = b_2 X(x)(y-y_0), \quad (1.16б)$$

где $X(x)$ является решением ОДУ:

$$X''(x) = g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} [X(x)]^{\gamma+\beta_2} \quad (1.16в)$$

Здесь b_2, y_0 - произвольные постоянные, а g_1 определяется выражением:

$$g_1 = g_0 f_{20} b_2^{\gamma+\beta_2-1}. \quad (1.16г)$$

Здесь и всюду далее используется обозначение $\beta_\Sigma = \beta_1 + \beta_2$.

2. При условии что

$$f_2(y) = f_{20} (c_1 \operatorname{sh}(\lambda y) + c_2 \operatorname{ch}(\lambda y))^{-\beta_2} (c_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + c_2 \operatorname{sh}(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}. \quad (1.17a)$$

уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(x, y) = X(x)(c_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + c_2 \operatorname{sh}(\lambda y)), \quad (1.17б)$$

где $X(x)$ является решением ОДУ:

$$X''(x) = g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} [X(x)]^{\gamma+\beta_2} - \lambda^2 X(x), \quad (1.17в)$$

а коэффициент g_1 определяется выражением:

$$g_1 = g_0 f_{20} \lambda^{\beta_2} \quad (1.17г)$$

3. При условии что

$$f_2(y) = f_{20}(c_2 \cos(\lambda y) - c_1 \sin(\lambda y))^{-\beta_2} (c_1 \cos(\lambda y) + c_2 \sin(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}. \quad (1.18a)$$

уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(x, y) = X(x)(c_1 \cos(\lambda y) + c_2 \sin(\lambda y)), \quad (1.18б)$$

где $X(x)$ является решением ОДУ:

$$X''(x) = g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} [X(x)]^{\gamma+\beta_2} + \lambda^2 X(x), \quad (1.18в)$$

причем коэффициент g_1 определяется выражением (1.17г).

Доказательство.

1. Используя мультипликативное РП [1,2], решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в уравнение (1.1) и учитывая условия (1.15), получаем:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = g_0 \psi_1(x) \psi_2(y), \quad (1.20)$$

где

$$\psi_1(x) = f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} [X(x)]^{\gamma+\beta_2-1}, \quad \psi_2(y) = f_2(y) [Y'(y)]^{\beta_2} [Y(y)]^{\gamma+\beta_1-1}. \quad (1.20a)$$

Аналогично доказательству теоремы 1.1, в результате дифференцирования (1.20) по x , получаем:

$$\frac{1}{\psi_1'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{X''(x)}{X(x)} \right) = g_0 \psi_2(y). \quad (1.21)$$

Правая и левая части уравнения (1.21) зависят от разных переменных, откуда следует, что

$$\psi_2(y) = \tilde{a}_2 = \text{const}. \quad (1.21a)$$

Подставляя выражение (1.21a) в (1.20), получаем:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = g_1 \psi_1(x) - \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (1.22)$$

Здесь $g_1 = g_0 \tilde{a}_2$. Разделяя переменные в (1.22) и учитывая (1.20a), находим уравнение для $X(x)$, и переопределенную систему из двух уравнений для $Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} [X(x)]^{\gamma+\beta_2-1} = -a, \quad (1.23)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = a \quad [Y'(y)]^{\beta_2} [Y(y)]^{\gamma+\beta_1-1} = \frac{\tilde{a}_2}{f_2(y)}. \quad (1.24)$$

При анализе системы (1.24) рассмотрим возможные частные случаи.

Случай а): $a = 0$. Тогда из первого уравнения системы (1.24) находим, что

$$Y(y) = b_2(y - y_0). \quad (1.25)$$

Подставляя (1.25) во второе уравнение системы (1.24), получаем выражение для $f_2(y)$:

$$f_2(y) = \tilde{a}_2 b_2^{1-\gamma-\beta_2} (y - y_0)^{1-\gamma-\beta_1}. \quad (1.26)$$

При этом уравнение (1.23) упрощается следующим образом:

$$X''(x) = g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} [X(x)]^{\gamma+\beta_2}. \quad (1.27)$$

Для нахождения коэффициента g_1 сравним соотношения (1.26) и (1.16а), откуда $\tilde{a}_2 = f_{20} b_2^{\gamma+\beta_2-1}$. Далее, учитывая, что $g_1 = g_0 \tilde{a}_2$, получаем выражение (1.16г).

Случай б): $a = \lambda^2 > 0$. Тогда из первого уравнения системы (1.24) получаем, что

$$Y(y) = c_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + c_2 \operatorname{sh}(\lambda y). \quad (1.28)$$

Аналогично предыдущему случаю, находим $f_2(y)$, подставив (1.28) во второе уравнение (1.24):

$$f_2(y) = \tilde{a}_2 \lambda^{-\beta_2} (c_1 \operatorname{sh}(\lambda y) + c_2 \operatorname{ch}(\lambda y))^{-\beta_2} (c_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + c_2 \operatorname{sh}(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}. \quad (1.29)$$

Случай в): $a = -\lambda^2 < 0$. Тогда из первого уравнения системы (1.24)

$$Y(y) = c_1 \cos(\lambda y) + c_2 \sin(\lambda y), \quad (1.30)$$

а функция $f_2(y)$ определяется выражением:

$$f_2(y) = \tilde{a}_2 \lambda^{-\beta_2} (c_2 \cos(\lambda y) - c_1 \sin(\lambda y))^{-\beta_2} (c_1 \cos(\lambda y) + c_2 \sin(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}. \quad (1.31)$$

Из (1.20) получаем уравнение относительно $X(x)$ для случаев б), в):

$$X''(x) = g_1 f_1(x) [X'(x)]^{\beta_1} [X(x)]^{\gamma+\beta_2} \mp \lambda^2 X(x), \quad (1.32)$$

где верхний знак относится к случаю б), а нижний - к случаю в). Выражение (1.17г) для g_1 находится путем рассуждений, аналогичных проведенным при анализе случая а).

Таким образом, в результате приведенных рассуждений в трех рассмотренных случаях получены выражения (1.25), (1.28), (1.30) для $Y(y)$, уравнения (1.27), (1.32) для $X(x)$, и выражения (1.26), (1.29), (1.31) для $f_2(y)$, при которых найденное решение существует. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично теореме 1.2, можно сформулировать утверждение о решениях уравнения (1.1), которые получаются из (1.16), (1.17), (1.18) путем замены $x \leftrightarrow y$, $X \leftrightarrow Y$, $f_1 \leftrightarrow f_2$, $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$, а также соответствующие условия существования этих решений. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 1.2.

2. Функциональное разделение переменных

В данном разделе рассмотрим решения уравнения (1.1), которые могут быть получены методом функционального разделения переменных.

Теорема 2.1.

Пусть $f(x, y) = F(z)$, $z = c_1x + c_2y$, где F – произвольная функция, c_1, c_2 – некоторые постоянные. Тогда уравнение (1.1) имеет решение типа бегущей волны $u(x, y) = U(z)$, причем функция $U(z)$ является решением следующего ОДУ:

$$U''(z) = Cg(U(z))[U'(z)]^{\beta_2} F(z) \quad (2.1)$$

$$C = \frac{c_1^{\beta_1} c_2^{\beta_2}}{c_1^2 + c_2^2}.$$

где

Доказательство.

Используя известный метод функционального РП [1,2], решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(x, y) = U(z), \quad z = X(x) + Y(y) \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (1.1), после дифференцирования и элементарных преобразований получаем:

$$\frac{U''(z)}{U'(z)} + \frac{X''(x) + Y''(y)}{[X'(x)]^2 + [Y'(y)]^2} = g(U(z))[U'(z)]^{\beta_2 - 1} \frac{f(x, y)[X'(x)]^{\beta_1} [Y'(y)]^{\beta_2}}{[X'(x)]^2 + [Y'(y)]^2} \quad (2.3)$$

Положим $X(x) = c_1x$, $Y(y) = c_2y$. Подставив эти выражения в (2.3) и учитывая, что по условию теоремы $f(x, y) = F(z)$, приходим к уравнению (2.1) относительно $U(z)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1.

Если $f(x, y) \equiv 1$, то решение уравнения (1.1) типа бегущей волны может быть представлено в неявном виде следующим образом:

1. Если $\beta_\Sigma \neq 1, \beta_\Sigma \neq 2$, то

$$c_1x + c_2y - z_0 = \int [v(CG(u) + A)]^{-\frac{1}{v}} du \quad (2.4a)$$

2. Если $\beta_\Sigma = 2$, то

$$c_1x + c_2y - z_0 = A \int \exp(-CG(u)) du \quad (2.4б)$$

3. Если $\beta_\Sigma = 1$, то

$$c_1x + c_2y - z_0 = \int \frac{du}{CG(u) + A}, \quad (2.4в)$$

где c_1, c_2, z_0, A - произвольные постоянные, $v = 2 - \beta_\Sigma$; $G(u)$ определяется выражением:

$$G(u) = \int g(u) du \quad (2.4г)$$

Доказательство.

Поскольку по условию $F(z) \equiv 1$, то уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$U''(z)[U'(z)]^{1-\beta_\Sigma} - C \frac{dG(U(z))}{dz} = 0 \quad (2.5)$$

При условиях $\beta_\Sigma \neq 1, \beta_\Sigma \neq 2$ уравнение (2.5) в результате интегрирования сводится к уравнению первого порядка:

$$[U'(z)]^v = v(CG(U(z)) + A) \quad (2.6)$$

В результате решения уравнения (2.6) получаем:

$$z - z_0 = \int [v(CG(U) + A)]^{-\frac{1}{v}} dU \quad (2.7)$$

Подставив в (2.7) выражение $z = c_1x + c_2y$ и заменив $U \rightarrow u$, получаем для данного случая решение (2.4а). Проводя рассуждения, аналогичные представленным выше, для случаев $\beta_\Sigma = 2$ и $\beta_\Sigma = 1$, получаем решения (2.4б) и (2.4в) соответственно. Доказательство закончено.

Теорема 2.2.

Пусть $f(x, y) = b_0x^{-\beta_1}y^{-\beta_2}F(z)$, $z = x^2 + y^2$, где F - произвольная функция. Тогда уравнение (1.1) имеет решение $u(x, y) = U(z)$, причем функция $U(z)$ является решением ОДУ:

$$\frac{d}{dz}(zU'(z)) = bg(U(z))[U'(z)]^{\beta_\Sigma} F(z) \quad (2.8)$$

где $b = b_0 \cdot 2^{\beta_\Sigma - 2}$. В частности, если выполнены условия $F(z) \equiv 1, \beta_\Sigma = 1$, то решение уравнения (1.1) можно представить в неявном виде:

$$x^2 + y^2 = c_0 \exp\left(\int \frac{du}{bG(u) + a_0}\right) \quad (2.9)$$

где c_0, a_0 – произвольные постоянные.

Доказательство.

Аналогично доказательству теоремы 2.1, используем метод функционального РП.

Положим $X(x) = x^2$, $Y(y) = y^2$. Подставляя эти выражения в (2.3), и учитывая выражение для $f(x, y)$, получаем:

$$\frac{U''(z)}{U'(z)} + \frac{1}{z} = \frac{b}{z} g(U(z)) [U'(z)]^{\beta_\Sigma - 1} F(z) \quad (2.10)$$

Умножив (2.10) на z и учитывая, что $\frac{d}{dz}(zU'(z)) = zU''(z) + U'(z)$, приходим к уравнению (2.8).

Предположим теперь, что выполнены условия $F(z) \equiv 1$, $\beta_\Sigma = 1$. Тогда (2.8) можно представить так:

$$\frac{d}{dz}(zU'(z) - bG(U(z))) = 0 \quad (2.11)$$

Понижая порядок уравнения (2.11) и решая полученное уравнение первого порядка, находим:

$$z = c_0 \exp\left(\int \frac{dU}{bG(U) + a_0}\right), \quad (2.12)$$

где c_0, a_0 – произвольные постоянные. Подставляя в (2.12) $z = x^2 + y^2$ и заменяя $U \rightarrow u$, получаем решение в форме (2.9). Теорема доказана.

Теорема 2.3.

Пусть

$$f(x, y) = (c_1 + 2ax)^{-\beta_1} (c_2 - 2ay)^{-\beta_2} [c_1 + 2ax)^2 + (c_2 - 2ay)^2] F(z), \quad (2.13a)$$

$$z = a(x^2 - y^2) + c_1x + c_2y + z_0, \quad (2.13б)$$

где F – произвольная функция. Тогда уравнение (1.1) имеет решение $u(x, y) = U(z)$, причем функция $U(z)$ является решением ОДУ:

$$U''(z) = g(U(z)) [U'(z)]^{\beta_\Sigma} F(z). \quad (2.14)$$

Доказательство.

Аналогично доказательству теорем 2.1, 2.2, используем метод функционального РП.

Положим $X(x) = ax^2 + c_1x + x_0$, $Y(y) = -ay^2 + c_2y + y_0$. Подставляя эти выражения в (2.3), и учитывая выражение для $f(x, y)$, получаем уравнение (2.14). Теорема доказана.

Теорема 2.4.

1. Пусть

$$f(x, y) = x^{-\beta_2} y^{-\beta_1} (x^2 + y^2) F(z), \quad z = xy, \quad (2.15)$$

где F – произвольная функция. Тогда уравнение (1.1) имеет решение $u(x, y) = U(z)$, причем функция $U(z)$ является решением уравнения (2.14).

Доказательство.

Будем искать автомодельное решение уравнения (1.1), которое имеет вид:

$$u(x, y) = x^\alpha U(z), \quad z = yx^\sigma, \quad (2.16)$$

где α, σ – параметры, которые должны быть определены ниже. Подставляя (2.16) в (1.1), получаем:

$$\begin{aligned} x^{\alpha+2\sigma} \left(1 + \frac{\sigma^2 y^2}{x^2} \right) U''(z) + \sigma(2\alpha + \sigma - 1) y x^{\alpha+\sigma-2} U'(z) + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} U(z) = \\ = g(x^\alpha U(z)) f(x, y) \left\{ \sigma y x^{\alpha+\sigma-1} U'(z) + \alpha x^{\alpha-1} U(z) \right\}^{\beta_1} \left\{ x^{\alpha+\sigma} U'(z) \right\}^{\beta_2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) допускает разделение переменных только в том случае, если $\alpha = 0, \sigma = 1$; тогда z определяется второй формулой (2.15). При указанных значениях параметров (2.17) сводится к виду:

$$(x^2 + y^2) U''(z) = g(U(z)) [U'(z)]^{\beta_2} f(x, y) y^{\beta_1} x^{\beta_2}. \quad (2.18)$$

Из (2.18) с учетом (2.15) следует, что функция $U(z)$ должна удовлетворять уравнению (2.14). Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследовано двумерное уравнение второго порядка эллиптического типа с правой частью, явно зависящей от координат, и содержащей произвольную нелинейность от искомой функции и степенные нелинейности от ее первых производных. Получены решения данного уравнения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны, автомодельное и сферически симметричное решения. Сформулированы условия существования полученных решений, которым должна удовлетворять правая часть уравнения. Результаты, полученные в данной работе, могут быть обобщены для уравнений более высокой размерности и с более сложными дифференциальными операторами.

Список литературы References

- Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М., Физматлит, 432.
- Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. 2012. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.
- Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит, 256.
- Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., Zhurov A. I. 2005. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mehaniki. М., Fizmatlit (In Russian).
- Рахмелевич И.В. 2015. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 1: 12-19.
- Rakhmelevich I.V. 2015. O dvumernykh hyperbolicheskikh uravneniyakh so stepennoy nelineynostiu po proizvodnym. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, №1: 12-19. (In Russian).
- Рахмелевич И.В. 2015. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 3: 18-25.
- Rakhmelevich I.V. 2015. O nekotorykh novykh resheniyakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynost'yami. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, No 3: 18-25 (in Russian).
- Рахмелевич И.В. 2016. О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями. Владикавказский математический журнал., 18 (4): 41-49.
- Rakhmelevich I.V. 2016. O resheniyakh mnogomernogo differentsialnogo uravneniya so smeshannoy starshey chastnoy proizvodnoy i stepennymi nelineynost'yami. Vladikavkazskiy matematicheskij zhurnal. 18(4): 41-49 (in Russian).
- Рахмелевич И.В. 2016. О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных. Известия вузов. Математика, № 4: 57-67.
- Rakhmelevich I.V. 2016. Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. Russian Mathematics, 60(4): 47-55.
- Рахмелевич И.В. 2017. О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным. Уфимский математический журнал, 9 (1): 98-108.
- Rakhmelevich I.V. 2016. On multidimensional partial differential equations with power nonlinearities in first derivatives. Ufa Mathematical Journal, 8(4): 98-108.
- Miller J. (Jr.), Rubel L.A. 1993. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. Journal of Physics A., 26: 1901-1913.
- Zhdanov R.Z. 1994. Separation of variables in the non-linear wave equation. Journal of Physics A., 27: L291-L297.

