УДК 517.95

ВНУТРЕННЕКРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

INTERNAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION CONTAINING FRACTIONAL DIFFUSION OPERATOR

К.У. Хубиев
K.U. Khubiev

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS,
89 A Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: khubiev_math@mail.ru

Аннотация
В статье исследуется задача с разрывными условиями сопряжения и нелокальными внутреннекраевыми условиями смещения в гиперболической части области для модельного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи, решение выписано в явном виде.

Abstract
In this paper we investigate a problem with non-continues conjugation condition and with a non-local inner-boundary shift in the hyperbolic part of the mixed domain for a model hyperbolic-parabolic equation with a fractional diffusion operator. The existence and uniqueness of the solution for the problem is proved. The solution is written out in explicit form.

Ключевые слова: нелокальная задача, задача со смещением, внутреннекраевая задача, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, оператор дробной диффузии.
Keywords: nonlocal problem, problem with shift, inner boundary value problem, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation, the fractional diffusion operator.

Интенсивное исследование краевых задач со смещением для гиперболического и смешанного типов уравнений началось с работы [1]. Краевые задачи как с локальным, так и нелокальным смещением для гиперболического и смешанного типов уравнений были объектом исследования многих авторов. В работе [2] были изучены нелокальные задачи для нагруженного гиперболического уравнения и для уравнения Фурье. В работе [3] исследована внутреннекраевая задача с локальным смещением для гиперболического уравнения общего вида. В [4] рассмотрена нелокальная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Весьма широкий обзор результатов исследований задач со смещением приводится в монографии [5].

Задачи с нелокальными условиями продолжают активно изучаться. В [6] рассмотрены различные внутреннекраевые задачи со смещением для уравнения колебания струны. В [7] для дифференциального уравнения, содержащего уравнение диффузии дробного порядка, исследована в бесконечной области нелокальная задача с разрывными условиями сопряжения. В [8] для уравнения с частной дробной производной Римана—Лиувилля исследована однозначная разрешимость задачи с обобщенным оператором дробного интегро-дифференцирования в краевом условии. В [9] для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа исследована нелокальная задача с интегральным условием в гиперболической части.

Рассмотрим модельное уравнение смешанного гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D_{0y}^{\alpha}u,\ y>0, \\ u_{xx}-u_{yy}, \quad y<0 \end{cases} \tag{1}$$

в объединении областей $\Omega=\Omega^{+}\cup\Omega^{-}$, где $\Omega^{+}=\{(x,y):0<x<1,\ y>0\}$, Ω^{-} - область, ограниченная характеристиками $AC:x+y=0$, $BC:x-y=1$ уравнения (1) и отрезком [0,1] прямой $y=0$, $0<\alpha<1$, $D_{ax}^{\alpha}\varphi(t)$ - оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка α с началом в точке a и с концом в точке x [10, с. 14]:

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(t)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_{a}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \quad \alpha<0, \\ \varphi(x), \quad \alpha=0, \\ \operatorname{sign}^{n}(x-a)\dfrac{d^{n}}{dx^{n}}D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(t), \quad \alpha>0, \end{cases}$$

где $n-1<\alpha\le n, \quad n\in N$.

Для уравнения (1) в [11, с. 55] был изучен аналог задачи Трикоми как в области Ω, так и в областях, где гиперболическая часть также характеристический треугольник, а параболическая часть - верхняя полуплоскость [11, с. 42] и половина верхней полуплоскости [11, с. 51]. В [12] рассматриваются смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной. В данной работе для уравнения (1) будем исследовать задачу с нелокальными внутреннекраевыми условиями смещения в гиперболической части.

Обозначим через J интервал $0<x<1$ прямой $y=0$.

Под *регулярным решением* уравнения (1) будем понимать функцию $u=u(x,y)$ из класса $y^{1-\alpha}u\in C(\overline{\Omega}^{+})$, $y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u)_{y}\in C(\Omega^{+}\cup J)$, $u_{xx}\in C(\Omega^{+})$, $u\in C(\overline{\Omega}^{-})\cap C^{2}(\Omega^{-})$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^{+}\cup\Omega^{-}$.

Для уравнения (1) исследуется следующая

Задача. *Найти в* Ω *регулярное решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y)=\varphi_{0}(y), \quad u(1,y)=\varphi_{1}(y), \quad y>0, \tag{2}$$

$$u[\theta_{0}(x)]=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_{n-j}^{i}u[\theta_{x_i}(x)]+\psi_{n-j}(x), \tag{3}$$

$j=0,1,...,n-1, \quad x_{n-j-1}\le x_{n-j}$, $x_0=0, \quad x_n=1, \quad \varphi_0(y),\varphi_1(y),\psi_{n-j}(x)$ *- заданные функции,* $\theta_{x_i}(\xi)$ *- точка пересечения характеристики* $x-y=\xi$ *с характеристикой* $x+y=x_i$, $\theta_{x_0}(x)=\theta_0(x)$, α_k^i *- заданные действительные числа,* $\alpha_k^i=0$ *при* $i=k$*. На интервале* J *выполняются условия сопряжения:*

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\lim_{y\to 0-}u(x,y), \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}[y^{1-\alpha}u(x,y)]_{y}=\lim_{y\to 0-}u_{y}(x,y). \tag{5}$$

Отметим, что задача с условиями (3) в гиперболической части области для уравнения Лаврентьева-Бицадзе исследовалась в [4].

Справедлива следующая

Теорема. *Если заданные функции* $y^{1-\alpha}\varphi_0(y),\, y^{1-\alpha}\varphi_1(y)\in C(\overline{\Omega}^{+})$, $\psi_k(x)\in C^1[0,1]\cap C^2]0,1[,\quad k=1,2,...n,$ *причем* $\psi_1(0)=\lim\limits_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\varphi_0(y)$, *и выполняются условия*

$$\lim_{x\to x_k}\frac{d\psi_k(x)}{l_k dx}=\lim_{x\to x_k}\frac{d\psi_{k+1}(x)}{l_{k+1}dx}, \tag{6}$$

где $l_k=1-\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_k^i\neq 0$, $k=1,2,...n,$ *то задача* (1) - (3) *имеет, и притом единственное решение.*

Доказательство. Пусть существует решение задачи (1)-(3). Обозначим через:

$$\tau(x)=\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,y),\;\; x\in\bar{J}, \tag{7}$$

$$\nu(x)=\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y,\;\; x\in J,$$

а из условия (2) задачи получим

$$\tau(0)=\psi_1(0),\quad \tau(1)=\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\varphi_1(y)=\tilde{\varphi}_1. \tag{8}$$

Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для уравнения (1), принесенное из параболической области в работе [11, с. 48] было выписано в виде

$$\nu(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\tau''(x). \tag{9}$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) с учетом введенных обозначений и условий сопряжения (4)-(5) в Ω^- можно представить в виде

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)d\xi. \tag{10}$$

Удовлетворяя (10) условию задачи (3), получим

$$\tau(x)+\tau(0)-\int_0^x\nu(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_{n-j}^i[\tau(x)+\tau(x_i)-\int_{x_i}^{x}\nu(\xi)d\xi]+2\psi_{n-j}(x), \tag{11}$$

$x_{n-j-1}\le x\le x_{n-j}$, $j=0,1,...,n-1.$

Дифференцируя тождество (11), получим функциональное соотношение, принесенное из гиперболической области :

$$\tau'(x)-\nu(x)=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_{n-j}^i[\tau'(x)-\nu(x)]+2\psi'_{n-j}(x). \tag{12}$$

Учитывая условие (6) теоремы и используя то, что $l_k=1-\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_k^i\neq 0$ для всех $k=1,2,...n$, перепишем (12) в виде

$$\tau'(x)-\nu(x)=-f(x), \tag{13}$$

где $f(x)=-\dfrac{2\psi'_k(x)}{l_k}$, $x_{k-1}\le x\le x_k$, $k=1,...,n$, причем $f(x)\in C[0,1]\cap C^1]0,1[$. Здесь надо отметить, что условие (6) теоремы обеспечивает непрерывность первых производных решения задачи $u(x,y)$ на характеристиках $x-y=x_i$, $i=1,2,...n-1$.

Из (13) и (9) получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\tau''(x)-\tau'(x)=f(x). \qquad (14)$$

Задача Дирихле (8) для уравнения (14) имеет единственное решение, которое можно записать в виде

$$\tau(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi+G_\xi(x,1)\tilde{\varphi}_1-G_\xi(x,0)\psi_1(0),$$

где $G(x,\xi)$ – функция Грина:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(e^{\mu x}-e^{\mu})(1-e^{-\mu\xi})}{e^{\mu}-1}, & 0\le\xi\le x,\\ \dfrac{(e^{\mu x}-1)(1-e^{\mu(1-\xi)})}{e^{\mu}-1}, & x\le\xi\le 1,\end{cases}$$

$$G_\xi(x,1)=\frac{e^{\mu x}-1}{e^{\mu}-1},\quad G_\xi(x,0)=\frac{e^{\mu x}-e^{\mu}}{e^{\mu}-1},\quad \mu=\Gamma(\alpha+1).$$

После нахождения функции $\tau(x)$ функция $\nu(x)$ легко определяется из (13), причем $\tau(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J)$, $\nu(x)\in C^1(J)$.

Далее задача в области Ω^- решается как задача Коши по формуле (10). В области же Ω^+ решение первой краевой задачи (2), (7) для уравнения (1) задается формулой [13]

$$u(x,y)=\int_0^y \frac{\partial G_1}{\partial\xi}|_{\xi=0}\,\varphi_0(\eta)d\eta-\int_0^y \frac{\partial G_1}{\partial\xi}|_{\xi=1}\,\varphi_1(\eta)d\eta+\int_0^1 G_1(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi,$$

где:

$$G_1=G_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}(y-\eta)^{\delta-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[e_{1,\delta}^{1,\delta}(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\delta}})]-[e_{1,\delta}^{1,\delta}(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\delta}})],$$

$\delta=\alpha/2$, $e_{a,b}^{c,d}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(c+ka)\Gamma(d-bk)}$ - функция Райта, $a>b$ [10, с. 23].

Теорема доказана.

Список литературы
References

1. Нахушев А.М. 1969. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дифференц. уравнения, 5(1): 44-59.

Nakhushev A.M. 1969. Certain boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type. Differ. Equations, 5(1): 44–59.

2. Нахушев А.М. 1979. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. Дифференц. уравнения. 15(1): 96-105.

Nakhushev A.M. 1979. Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of ground moisture. Differ. Equations, 15(1): 96–105.

3. Кхан М.Р. 1982. Краевые задачи со смещением для гиперболического уравнения. Дифференц. уравнения, 18(6): 1082-1085.

Khan M.R. 1982. Boundary value problems with displacement for a hyperbolic equation., Differ. Equations, 18(6): 1082–1085.

4. Кхан М.Р. 1984. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Дифференц. уравнения, 20(4): 710-711.

Khan M.R. 1982. A nonlocal problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation. Differ. Equations, 20(4): 710–711.

5. Нахушев А.М. 2006. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., Наука, 288.

Nakhushev A.M. 2006. Zadachi so smeshheniem dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh. M., Nauka, 288. (In Russian)

6. Аттаев А.Х. 2014. Краевые задачи с внутреннекраевым смещением для уравнения колебания струны. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 16(2): 17-19.

Attaev A.Kh. 2014. A boundary value problems with inner shift for the string equation. Reports Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, 16(2): 17-19.

7. Репин О.А. 2015. Краевая задача для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана–Лиувилля. Уфимский математический журнал. 7(3): 70-75.

Repin O.A. 2015. Boundary value problem for partial differential equation with fractional Riemann–Liouville derivative. Ufa Mathematical Journal, 7(3), 67–72.

8. Тарасенко А.В., Егорова И.П. 2017. О нелокальной задаче с дробной производной Римана–Лиувилля для уравнения смешанного типа. Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 21(1): 112–121.

Tarasenko A.V., Egorova I.P. 2017. On nonlocal problem with fractional Riemann–Liouville derivatives for a mixed-type equation. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 21(1): 112–121.

9. Хубиев К.У. 2016. Задача с интегральным условием в гиперболической части для характеристически нагруженного гиперболо-параболического уравнения. Мат. заметки СВФУ, 23(4): 91-98.

Khubiev K.U. 2016. A problem with integral condition in the hyperbolic part for a characteristicly loaded hyperbolic-parabolic equation. Yakutian Mathematical Journal, 23(4): 91-98.

10. Псху А.В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука, 199.

Pskhu A.V. 2005. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka. M., Nauka, 199. (In Russian).

11. Геккиева С.Х. 2003. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 75.

Gekkieva S.Kh. 2003. Kraevye zadachi dlja nagruzhennyh parabolicheskih uravnenij s drobnoj proizvodnoj po vremeni. Dis. ... cand. phys.-math. nauk. Nalchik, 75. (In Russian)

12. Геккиева С.Х. 2016. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, № 6(227), вып. 42: 32-35.

Gekkieva S.Kh. 2016. Mixed boundary value problems for the loaded diffusion-wave equation. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics& Physics, №6(227), Iss. 42: 32-35.

13. Псху А.В. 2003. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка. Дифференц. уравнения. 39(9): 1286-1289.

Pskhu A.V. 2003. Solution of the first boundary value problem for a fractional-order diffusion equation. Differ. Equations. 39(9): 1359-1363.