УДК 514.76
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-33-40

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ С ВНУТРЕННЕЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

CLASSIFICATION OF ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURES ON DISTRIBUTIONS WITH INTERNAL SYMPLECTIC CONNECTIVITY

А.В. Букушева
A.V. Bukusheva

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского,
Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky
83 Astrahanskaya St, Saratov, 410012, Russia

E-mail: bukusheva@list.ru

Аннотация

На распределении контактной структуры с помощью фиксированной внутренней симплектической связности определяется (продолженная) почти контактная метрическая структура. Выделяются внутренние инварианты контактной структуры с заданной внутренней симплектической связностью: тензор кривизны Схоутена, допустимая симплектическая структура и тензор Вагнера-Схоутена. В терминах внутренних инвариантах осуществляется классификация продолженных структур. В частности доказывается, что множество продолженных почти контактных метрических структур не содержит в себе косимплектические структуры и структуры Кенмоцу. Найдены условия, при которых продолженная почти контактная метрическая структура принадлежит классу C_{11}.

Abstract

The article is devoted to the study of geometric structures that occur in the distribution of contact manifold. In the previous author`s research almost contact metric structures have been studied. These almost contact metric structures are called extended structures, and are naturally defined on distributions of almost contact and paracontact metric manifolds, bi-metric manifolds, sub-Finsler and sub-Riemannian manifolds. The contact manifold does not have Riemannian metric in contrast to the manifolds listed above. Consequently, the metric tensor of the extended structure is determined due to the symplectic form that fits up the contact structure. The extended almost contact metric structure is defined on the distribution of the contact structure with a fixed internal symplectic connection. The interior invariants of a contact structure with a given interior symplectic connection are distinguished in the article. The following interior invariants are examined: Schouten curvature tensor, the admissible symplectic structure and Wagner-Schouten tensor. The classification of extended structures is carried out in terms of internal invariants. In particular, it is proved that the set of extensions of almost contact metric structures does not contain any cosymplectic and Kenmotsu structures. Besides, the article focuses on the conditions for referring the extended almost contact metric structure to the class C_{11}.

Ключевые слова: контактная структура, почти контактная метрическая структура, внутренняя симплектическая связность, кососимметрическая структура, структура Кенмоцу.
Keywords: contact structure, almost contact metric structure, interior symplectic connection, skew-symmetric structure, Kenmotsu structure.

1. Введение

В современной дифференциальной геометрии касательные расслоения гладких многообразий занимают весьма почетное место. Обычно в качестве исходного многообразия выбирается риманово (или финслерово) многообразие, касательное расслоение к которому наделяется римановой структурой. Существуют и другие возможности задания на касательном расслоении многообразия римановой метрики. Начало исследования геометрии многообразия *D*, наделенного естественным образом дополнительными структурами, начинается с работ Букущева, [2011, 2012, 2015]. В отличие от многообразия *TM*, многообразие *D* имеет нечетную размерность. Таким образом, многообразие *D*, например, не может быть наделено симплектической структурой, зато оно естественным образом может нести на себе (продолженную) почти контактную метрическую структуру.

Свойства продолженной структуры зависят от строения инвариантов внутренней геометрии многообразия M. К основным инвариантам внутренней геометрии субриманова многообразия M мы относим: тензор кривизны Схоутена; 1-форму η, порождающую распределение D; производную Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$.

Изначально предполагается, что выполняется условие $\partial_n \Gamma^b_{ac} = 0.$ В этом случае компоненты тензора кривизны Схоутена также не зависят от последней координаты адаптированной системы: $\partial_n R^d_{abc} = 0,$ что в инвариантном виде представлено равенством $L_{\vec{\xi}} R = 0.$ В случае, когда $P^c_{ad} = 0,$ свойства тензора Схоутена идентичны свойствам тензора кривизны симплектической связности [Gelfand,1997].

В работе Паньженского [2007] получены инвариантные характеристики классов Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур, определяемых на касательных расслоениях почти симплектических многообразий. Настоящая работа является продолжением работы Галаева [2015]. На основе классификации Д. Чинья и С. Гонзалез [Chinea, 1990] в работе выделяются три класса почти контактных метрических структур: косимплектическая структура, структура Кенмоцу и структура класса C_{11}. Вопросам классификации почти контактных метрических многообразий посвящены также работы других авторов [Банару, 2014, Abu-Saleem, 2014, Banaru, 2015, Erken, 2015, Ozdemir, 2016].

Находятся условия, при которых продолженная структура принадлежит выделенным классам.

2. Внутренняя симплектическая связность на многообразии с контактной структурой

Рассматривается гладкое многообразие *M* нечетной размерности *n=2m+1* с заданной на нем контактной структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, D\right),$ где η и $\vec{\xi}$ 1-форма и векторное поле, порождающие соответственно распределения $D = \ker(\eta)$ и $D^{\perp} = Span\left(\vec{\xi}\right)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство $TM = D \oplus D^{\perp}.$ При этом имеет место равенство: $rk(\omega) = 2m,$ где $\omega = d\eta.$ Многообразие *M* будем называть контактным многообразием.

Пусть ∇ – внутренняя линейная связность [Галаев, 2016] на многообразии *M*, т.е. отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\ \nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}};$$
$$2)\ \nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}.$$
$$3)\ \nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению *D*).

Карту $K(x^\alpha)$ (*α, β, γ* = 1,..., *n; a, b, c = 1, ..., 2m: i, j, k* = 1,..., 2*n*-1) многообразия *M* назовем адаптированной к распределению *D*, если $\frac{\partial}{\partial x^n} = \vec{\xi}$ [Букушева, 2017]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, где $P: TM \to D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение *D*: $D = span(\vec{e}_a)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются как коэффициенты разложения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Формула преобразования для коэффициентов внутренней связности $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_{c'}^{c} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_{c'}^{c} \vec{e}_a A_b^{c'}$ определяется из соотношения $\vec{e}_a = A_a^{a'} \vec{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля [Галаев, 2016]:

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}],$$
$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P\left[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\right],$$

где $Q = I - P$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ будем называть тензором кривизны контактного многообразия.

Компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах выражаются равенствами [Galaev, 2015, 2018]:

$$R_{cab}^d = 2\vec{e}_{[\vec{a}}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e,\ \ R(\vec{e}_a,\vec{e}_b)\vec{e}_c = R_{cab}^d \vec{e}_d.$$

Известно [Галаев, 2015], что на контактном многообразии существует внутренняя симплектическая связность без кручения, сохраняющая 2-форму *ω*. Такую связность будем называть внутренней симплектической связностью. Внутренних симплектических связностей бесконечно много. Зафиксируем одну из них и обозначим ее коэффициенты Γ_{ac}^b.

Предложение 1. На многообразии с допустимой симплектической структурой существует внутренняя симплектическая связность такая, что $\partial_n \Gamma_{ac}^b = 0$.

Доказательство. Действительно, с одной стороны $d\omega = 0$, т.к. $\omega = d\eta$. С другой стороны имеют место равенства [Галаев, 2015]:

$$3d\omega(\vec{e}_a,\vec{e}_b,\vec{e}_c) = \vec{e}_a\omega_{bc} + \vec{e}_b\omega_{ca} + \vec{e}_c\omega_{ab},$$
$$3d\omega(\vec{e}_a,\vec{e}_b,\partial_n) = \partial_n\omega_{ab}.$$

Тем самым получаем, что $\partial_n \omega_{ab} = 0.$ Пусть для произвольной внутренней связности $\tilde{\nabla}$ без кручения выполняется равенство $\partial_n \tilde{\Gamma}^a_{bc} = 0.$ Тогда легко проверить, что внутренняя связность $\nabla,$ определяемая равенством

$$\Gamma^b_{ac} = \tilde{\Gamma}^b_{ac} + \frac{1}{2}\omega^{db}\tilde{\nabla}_a \omega_{cd},$$

является внутренней симплектической связностью, для которой справедливо равенство $\partial_n \Gamma^b_{ac} = 0.$ Последнее условие не зависит от выбора адаптированной системы координат.

3. Свойства тензора кривизны Схоутена внутренней симплектической связности

В случае когда $\partial_n \Gamma^b_{ac} = 0,$ компоненты тензора кривизны Схоутена также не зависят от последней координаты адаптированной системы: $\partial_n R^d_{abc} = 0.$ В инвариантном виде последнее равенство переписывается в виде $L_{\vec{\xi}} R = 0.$ В этом случае свойства тензора Схоутена идентичны свойствам тензора кривизны симплектической связности [Gelfand, 1997]. Тензор с компонентами $\partial_n \Gamma^b_{ac} = 0$ получил название тензора Вагнера-Схоутена и наряду с тензором Схоутена относится к внутренним инвариантам контактного многообразия с внутренней симплектической связностью.

Пусть $R_{abcd} = \omega_{ae} R^e_{bcd} = \omega(\vec{e}_a, R(\vec{e}_c, \vec{e}_d)\vec{e}_b).$

Предложение 2. Для компонент тензора кривизны Схоутена внутренней симплектической связности выполняются равенства $R_{abcd} = R_{bacd}.$

Доказательство. Имеем: $\vec{e}_a \vec{e}_b \omega_{cd} = \vec{e}_a(\omega(\nabla_{\vec{e}_b}\vec{e}_c, \vec{e}_d) + \omega(\vec{e}_c, \nabla_{\vec{e}_b}\vec{e}_d)).$

Альтернируя последнее равенство по индексам *a, b*, и учитывая, что $\partial_n \omega_{ab} = 0$ и $\partial_n \Gamma^b_{ac} = 0,$ убеждаемся в справедливости равенства $R_{abcd} = R_{bacd}.$

Пользуясь тем, что $\partial_n R^d_{abc} = 0,$ убеждаемся в справедливости аналога первого тождества Бьянки для тензора Схоутена: $R_{abcd} = R_{acdb} = R_{adbc}.$

Полученные выше тождества понадобятся нам в следующем разделе для нахождения коэффициентов связности Леви-Чивита продолженной почти контактной метрической структуры.

4. Продолженные почти контактные метрические структуры на распределениях контактных многообразий с внутренней симплектической связностью

Распределение *D* контактного многообразия является гладким многообразием размерности 2*n*-1. Векторные поля

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b},\ \partial_n,\ \partial_{n+a}) = (A_i)$$

определяют [Галаев, 2016] на распределении *D* неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b)$$

– соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d} R^c_{bad}\partial_{n+c},$$
$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n\right] = x^{n+d}\partial_n \Gamma^c_{ad}\partial_{n+c},$$
$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c},$$

где R^c_{bad} – компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах.

Имеет место

Предложение 3 [Галаев, 2016]. Пусть ∇ – внутренняя симплектическая связность с тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. Тогда для всех $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства:

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \left\{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\right\}^v, \tag{1}$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \left\{P(\vec{x}, \vec{p})\right\}^v, \tag{2}$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v, \tag{3}$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v. \tag{4}$$

Определим на многообразии D эндоморфизм J и метрический тензор g, полагая:

$$J\,\vec{x}^h = \vec{x}^v,\ \ J\,\vec{x}^v = -\vec{x}^h,\ \ J\,\partial_n = 0,$$
$$g = \omega_{ab}dx^a \otimes \theta^{n+b} - \omega_{ab}\theta^{n+a} \otimes dx^b + \theta^n \otimes \theta^n.$$

Предложение 4. Структура $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*,\ D)$, где $\tilde{D} = \ker(\lambda)$, $\vec{u} = \partial_n$ определяет на многообразии D почти контактную метрическую структуру. Будем в дальнейшем называть структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*,\ D)$ продолженной структурой.

Справедливость предложения 4 подтверждается следующими равенствами:

$$g(J\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b) = g(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = 0 = g(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b),$$

$$g(J\vec{\varepsilon}_a, J\partial_{n+b}) = -g(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b) = \omega_{ab} = g(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}).$$

Предложение 5. Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивита на почти контактном метрическом многообразии D, тогда ее ненулевые коэффициенты $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ в адаптированных координатах получают следующее представление:

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab},$$
$$2\tilde{\Gamma}^{n+c}_{ab} = \omega^{dc}(R_{bad} + R_{abd} + R_{dab}),$$
$$\tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba},$$
$$\tilde{\Gamma}^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}.$$

Здесь $R_{abd} = x^{n+c}R_{cabd}$.

Доказательство предложения 5 опирается на равенства (1)-(4), а также на формулу для нахождения коэффициентов связности:

$$2\Gamma^m_{ij} = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega^l_{kj} g_{li} + \Omega^l_{ki} g_{ij}) + \Omega^m_{ij},$$

где $\Omega^n_{ab} = 2\omega_{ba}$, $\Omega^{n+c}_{ab} = R^c_{bad}x^{n+d}$, $\Omega^{n+c}_{a,n+b} = \Gamma^c_{ab}$, $\Omega^{n+c}_{an} = \partial_n \Gamma^c_{ab} x^{n+b}$.

Найдем координатное представление фундаментальной формы $\Omega(\vec{x},\vec{y}) = g(\vec{x}, J\vec{y})$. Имеем:

$$\Omega(\vec{\varepsilon}_a,\vec{\varepsilon}_b) = g(\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b) = g(\vec{\varepsilon}_a,\partial_{n+b}) = \omega_{ab},$$
$$\Omega(\vec{\varepsilon}_a,\partial_{n+b}) = 0,$$
$$\Omega(\partial_{n+a},\partial_{n+b}) = -g(\partial_{n+a},\vec{\varepsilon}_b) = \omega_{ab},$$
$$\Omega(\partial_{n+a},\cdot) = 0.$$

Таким образом, ненулевые компоненты формы Ω в адаптированных координатах определяются равенствами:

$$\Omega_{ab} = \Omega_{n+a,n+b} = \omega_{ab}.$$

Выделим три класса почти контактных метрических структур:

1) косимплектическая структура – $\tilde{\nabla} J = 0$;

2) структура Кенмоцу – $(\tilde{\nabla} J)\vec{y} = g(J\vec{x},\vec{y})\vec{u} - \lambda(\vec{x})J\vec{y}$;

3) структура класса C_{11} – $(\nabla_{\vec{x}}\Omega)(\vec{y},\vec{z}) = -\lambda(\vec{x})(\nabla_{\vec{u}}\Omega)(J\vec{y},J\vec{z})$.

Предложение 4 используется для доказательства следующих теорем.

Теорема 1. Множество продолженных почти контактных метрических структур $(\tilde{D}, J,\vec{u},\lambda = \eta\circ\pi_*,\ g, D)$ не содержит в себе косимплектических структур и структур Кенмоцу.

Доказательство. В адаптированном базисе выполняются следующие соотношения: $J_a^{n+b} = \delta_a^b$, $J_{n+a}^b = -\delta_a^b$. Отсюда получаем:

$$\tilde{\nabla}_a J_{n+b}^n = \tilde{\Gamma}_{ad}^n J_{n+b}^d = -\tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ab}.$$

Для контактного многообразия равенство $\omega_{ab} = 0$ не выполняется, что указывает на отсутствие среди продолженных структур косимплектических структур.

Далее, с одной стороны,

$$(\tilde{\nabla}_a J)\partial_{n+b} = \omega(\varepsilon_a,\varepsilon_b)\partial_n + \frac{1}{2}\omega^{cd}(R_{bad} + R_{abd} + R_{dab})\partial_{n+c}.$$

С другой стороны,

$$g(J\vec{\varepsilon}_a,\partial_{n+b}) = g(\partial_{n+a},\partial_{n+b}) = 0.$$

Что и доказывает теорему.

Теорема 2. Продолженная почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, J,\vec{u},\lambda = \eta\circ\pi_*,\ g, D)$ принадлежит классу C_{11} тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$R_{bad} + R_{abd} + R_{dab} = 0.$$

Доказательство. Заметим, что правая часть равенства $(\nabla_{\vec{x}}\Omega)(\vec{y},\vec{z}) = -\lambda(\vec{x})(\nabla_{\vec{u}}\Omega)(J\vec{y},J\vec{z})$ тождественно равна нулю, т.к. $(\nabla_{\vec{u}}\Omega)(J\vec{y},J\vec{z}) = 0$. Далее, проводя необходимые вычисления, получаем

$$\tilde{\nabla}_a\Omega_{n+b,c} = -\tilde{\Gamma}_{ac}^{n+d}\omega_{bd} = \frac{1}{2}\omega^{de}(R_{cae} + R_{ace} + R_{eac})\omega_{bd} = \frac{1}{2}(R_{cab} + R_{acb} + R_{bac}),$$

что и доказывает теорему.

4. Заключение

Полученные в настоящей статье результаты следует рассматривать как вклад в развитие геометрии продолженных структур. В отличие от геометрии касательного расслоения, имеющей богатую историю исследования, геометрия распределения многообразия с контактной структурой становится предметом изучения в последнее время. Стимулом для исследования геометрии продолженных структур может служить возможность использования многообразия D в качестве модельного пространства в задачах неголономной механики и теоретической физики. Если M – субриманово многообразие контактного типа, то на его распределении D естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, позволяющая придать инвариантный характер аналитическому описанию механики со связями. На многообразии D определяется геодезическая пульверизация связности над распределением – векторное поле, проекции интегральных кривых которого совпадают с допустимыми геодезическими – траекториями движения механической системы со связями [Bukusheva, 2011]. Есть все основания предполагать, что геометрия продолженных структур может быть использована в теории Калуцы-Клейна. Заметим также, что задание продолженной структуры эквивалентно заданию продолженной связности. Продолженная связность [Bukusheva, 2011] – это связность с кручением, естественным образом возникающая на субримановых многообразиях с дополнительными структурами – почти контактной метрической, би-метрической и т.д., и находящая применение в теоретической физике.

Список литературы
References

1. Банару М.Б. 2014. Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 3: 60–62.

Banaru M.B. 2014. Pochti kontaktnye metricheskie giperpoverhnosti s tipovym chislom 1 ili 0 v priblizhenno kelerovyh mnogoobraziyah [Almost contact metric hypersurfaces with type number 0 or 1 in nearly-Kählerian manifolds]. Moscow University Mathematics Bulletin, 69 (3): 132–134 .

2. Букушева А.В. 2015. О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, 17 (214) (40): 20–24.

Bukusheva A.V. 2015. O geometrii kontaktnyh metricheskih prostranstv s φ-svyaznost'yu [The geometry of the contact metric spaces φ-connection]. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 17 (214) (40): 20–24 (in Russian).

3. Букушева А.В. 2014. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 14 (3): 247-251.

Bukusheva A.V. 2014. Sloeniya na raspredeleniyah s finslerovoj metrikoj [Foliation on distribution with Finslerian metric]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 14 (3): 247-251 (in Russian).

4. Букушева А.В. 2012. О геометрии слоений на распределениях с финслеровой метрикой. Известия Пензенского педагогического университета им. В.Г. Белинского (Серия физико-математические и технические науки), 30: 33-38.

Bukusheva A.V. 2012. O geometrii sloenij na raspredeleniyah s finslerovoj metrikoj [On the Geometry of Foliations on Distributions with Finsler Metric]. Izv. Penz. Pedagog. Univ. (Ser. fiz.-matem. i tekhn. nauki), 30: 33-38.

5. Букушева А.В., Галаев С.В. 2013. Связности над распределением и геодезические пульверизации. Известия высших учебных заведений. Математика, 4: 10-18.

Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2013. Connections on distributions and geodesic sprays. Russian Mathematics. 57(4): 7-13.

6. Букушева А.В., Галаев С.В. 2017. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 48: 32–41.

Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2017. Geometriya pochti kontaktnyh giperkehlerovyh mnogoobrazij [Geometry of an almost contact hyper-Kähler manifolds]. Differentsialnaya geometriya mnogoobrazij figur, 48: 32–41.

7. Галаев С.В., Шевцова Ю.В. 2015. Почти контактные метрические структуры, определяемые симплектической связностью над распределением. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 15 (2): 136–141.

Galaev S.V., Shevtsova Yu.V. 2015. Pochti kontaktnye metricheskie struktury, opredelyaemye simplekticheskoj svyaznost'yu nad raspredeleniem [Almost contact metric structures defined by a symplectic structure over a distribution]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 15 (2): 136–141 (in Russian).

8. Галаев С.В. 2016. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств. Чебышевский сборник, 17, 3 (59): 53–63.

Galaev S.V. 2016. Obobshchennyj tenzor krivizny Vagnera pochti kontaktnyh metricheskih prostranstv [Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces]. Chebyshevskii Sbornik, 17, 3(59): 53–63 (in Russian).

9. Галаев С.В. 2016. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой. Вестник Башкирского университета, 21 (3): 551–555.

Galaev S. V. 2016. Gladkie raspredeleniya s dopustimoj giperkompleksnoj psevdo-ehrmitovoj strukturoj [Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-hermitian structure]. Vestnik Bashkirskogo Universiteta, 21 (3): 551–555 (in Russian).

10. Галаев С.В. 2016. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика, 16 (3): 263–272.

Galaev S.V. 2016. Dopustimye giperkompleksnye struktury na raspredeleniyah sasakievyh mnogoobrazij [Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 16 (3): 263–272 (in Russian).

11. Паньженский В.И., Сухова О.В. 2007. Почти эрмитовы структуры на касательном расслоении почти симплектического многообразия. Известия высших учебных заведений. Математика, 11: 75–78.

Panzhensky V.I., Sukhova O.V. 2007. Pochti ehrmitovy struktury na kasatel'nom rassloenii pochti simplekticheskogo mnogoobraziya [Almost Hermitian structures on the tangent bundle of an almost symplectic manifold]. Russian Math. (Iz. VUZ), 51 (11): 73–75.

12. Abu-Saleem A., Banaru M.B. 2014. On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 8 (1): 35–46.

13. Banaru M.B., Banaru G.A. 2015. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series 3: Mathematics, Informatics, Physics. 8 (57) (2): 21–28.

14. Bukusheva A.V., Galaev S.V. 2011. Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 4 (2): 13–22.

15. Chinea D., Gonzalez C. 1990. Classification of almost contact metric structures. Annali di Matematica pura ed applicata (IV). V. CLVI. P. 15–36.

16. Erken I.K., Dacko P., Murathan C. 2015. Almost a-paracosymplectic manifolds. J. Geom. Phys. 88: 30–51.

17. Galaev S.V. 2015. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 31 (1): 35–46.

18. Galaev S.V. 2018. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. Lobachevskii Journal of Mathematics, 39 (1): 71–76.

19. Gelfand I., Retakh V., Shubin M. 1997. Fedosov Manifolds, Symplectic Geometry Workshop, Toronto.

20. Ozdemir N, Aktay S, Solgun M. 2016. Almost Hermitian structures on the products of two almost contact metric manifolds. Differ Geom Dyn Syst., 18: 102–109.