УДК 517.926.4
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-14-20

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ

A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE CLASS OF HIGH ORDER DEGENERATING ELLIPTIC EQUATION CONTAINING VARIOUS WEIGHT FUNCTIONS

А.В. Глушак
A.V. Glushak

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: Glushak@.bsu.edu.ru

Аннотация
Устанавливается априорная оценка решения задачи Дирихле для линейного дифференциального уравнения высокого порядка, содержащего сумму двух вырождающихся эллиптических операторов и одного регулярного эллиптического оператора.

Abstract
A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a linear differential equation of high order containing the sum of two degenerate elliptic operators and one regular elliptic operator is established.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения высокого порядка, задача Дирихле, априорная оценка решения.
Key words: degenerate differential equations of high order, the Dirichlet problem, a priori estimate of the solution.

Введение

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей. Обзор литературы по уравнениям с неотрицательной характеристической формой, которые, в частности, включают вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных можно найти в [1, 2]. В этих работах уже рассматривались вырождающиеся эллиптические граничные задачи, содержащие производные с различными весовыми функциями. В отличие от указанных работ [1, 2] в настоящей работе в уравнение введён регулярный эллиптический оператор порядка $2l$, что привело к изменению в постановке граничных условий.

Чтобы не усложнять выкладки, в рассматриваемых операторах оставлены только слагаемые, содержащие старшие производные и свободные члены.

Постановка задачи

В полосе $D=[0,d]\times R_n$ рассмотрим задачу Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами

$$L_{2m}(D_\alpha, D_y)U(x,y) + L_{2p}(D_\beta, D_y)U(x,y) + L_{2l}(D_x, D_y)U(x,y) = F(x,y), \tag{1}$$

$$U(d,y) = \partial_x U(d,y) = \cdots = \partial_x^{m-1} U(d,y) = 0, \tag{2}$$

$$U(0,y) = \partial_x U(0,y) = \cdots = \partial_x^{l-1} U(0,y) = 0, \tag{3}$$

где $l < p < m$ – натуральные числа, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ – мультииндекс,

$$L_{2m}(\tau,\xi) = a_1\tau^{2m} + a_2\xi^{2m} + a_3, \qquad L_{2p}(\tau,\xi) = b_1\tau^{2p} + b_2\xi^{2p} + b_3, \qquad L_{2l}(\tau,\xi) = d_1\tau^{2l} + d_2\xi^{2l} + d_3,$$

$$D_y^\mu U(x,y) = \partial_{y_1}^{\mu_1} \cdots \partial_{y_n}^{\mu_n} U(x,y), \quad D_\alpha U(x,y) = i\sqrt{\alpha(x)}\,\partial_x\left(\sqrt{\alpha(x)}U(x,y)\right), \quad \alpha(x) \in C^{2m}[0,d], \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(x) > 0$$

при $x > 0$. Аналогично D_α определяется оператор D_β. Коэффициенты $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, d_1, d_2, d_3$ – действительные постоянные числа.

Условие 1. Многочлены $L_{2m}(\tau,\xi), L_{2p}(\tau,\xi)$ и $L_{2l}(\tau,\xi)$ положительны при любых $(\tau,\xi) \in R_{n+1}$.

Условие 2. Пусть $\alpha(x), \beta(x) \in C^{2m}[0,d]$ и $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Пусть также $\partial_x\alpha(0) = \partial_x\beta(0) = 0$.

Введём в рассмотрение функциональные пространства, в которых будет доказываться априорная оценка, а затем и разрешимость граничной задачи (1) – (3).

Обозначим через $H_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}(D)$ пространство функций $U(x,y) \in L_2(D)$, для которых конечен квадрат нормы

$$\|| U(x,y) \||^2 = \sum_{j=0}^{2m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left|D_\alpha^j u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi + \sum_{j=0}^{2p} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j} \left|D_\beta^j u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi +$$
$$+ \sum_{j=0}^{2l} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2l-j} \left|D_x^j u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi\,,$$

где $u(x,\xi) = F_{y\to\xi}[U(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,y)\exp(-i\xi y)dy$ – преобразование Фурье функции $U(x,y) \in L_2(D)$ по переменной $y \in R_n$.

Наряду с задачей (1) – (3) рассмотрим задачу

$$L_{2m}(D_\alpha, \xi)u(x,\xi) + L_{2p}(D_\beta, \xi)u(x,\xi) + L_{2l}(D_x, \xi)u(x,\xi) = f(x,\xi), \tag{4}$$

$$u(d,\xi) = \partial_x u(d,\xi) = \cdots = \partial_x^{m-1} u(d,\xi) = 0, \tag{5}$$

$$u(0,\xi) = \partial_x u(0,\xi) = \cdots = \partial_x^{l-1} u(0,\xi) = 0, \tag{6}$$

полученную из задачи (1) – (3) после применения преобразования Фурье $F_{y\to\xi}[\cdot]$ по переменной $y \in R_n$.

Через $FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}(D)$ мы будем обозначать пространство образов Фурье по переменной $y \in R_n$ функций из пространства $H_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}(D)$.

Априорная оценка

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для функции $u(x,\xi) \in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}(D)$, являющейся решением задачи (4) – (6), выполнена оценка

$$\sum_{i=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-i}\int_0^d \left|D_\alpha^i u(x,\xi)\right|^2 dx + \sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\int_0^d \left|D_\beta^j u(x,\xi)\right|^2 dx + \sum_{k=0}^{2l}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-k}\int_0^d \left|D_\beta^k u(x,\xi)\right|^2 dx \le c_1\int_0^d |f(x,\xi)|^2 dx, \tag{7}$$

с постоянной $c_1 > 0$ не зависящей от $u(x,\xi)$ и $f(x,\xi) \in FL_2(D)$.

Доказательство. Также как и в работах [1, 2], на функциях $v(x) \in L_2(0,d)$ определим интегральное преобразование F_α по формуле

$$[F_\alpha v](\tau)=\int_0^d v(x)\exp\left(-i\tau\int_x^d\frac{ds}{\alpha(s)}\right)\frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}}\,. \tag{8}$$

Преобразование F_α обладает следующими свойствами:

а) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_\alpha v|^2\,d\tau=\int_0^d|v|^2\,dx$ (равенство Парсеваля),

б) для функций $v(x)\in C^p[0,d]$, удовлетворяющих условиям $v(d)=\partial_x v(d)=\dots=\partial_x^{p-1}v(d)=0$, справедливо равенство $\left[F_\alpha\left(D_\alpha^p v\right)\right](\tau)=\tau^p[F_\alpha v](\tau)$.

Поскольку функции класса $C^{2m+p}[0,d]$ плотны в $H_\alpha^{2m}(0,d)$, то в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x,\xi)\in C^{2m+p}[0,d]$ при почти всех $\xi\in R_n$.

Умножим уравнение (4) на функцию $\bar u(x,\xi)$ и проинтегрируем полученное равенство по $x\in(0,d)$. В результате получим

$$\left(L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)+\left(L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)+\left(L_{2l}(D_x,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)=\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right),$$

где скалярное произведение определено равенством $\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right)=\int_0^d f(x,\xi)\,\bar u(x,\xi)\,dx$.

Из перечисленных ранее свойств интегрального преобразования (8) для $s\le m$ вытекает равенство

$$\left(D_\alpha^{2s}u(x,\xi),u(x,\xi)\right)\equiv\int_0^d D_\alpha^{2s}u(x,\xi)\,\bar u(x,\xi)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{2s}[F_\alpha u](\tau,\xi)\,\overline{[F_\alpha u]}(\tau,\xi)\,d\tau$$

и, следовательно,

$$\left(L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)+\left(L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)+\left(L_{2l}(D_x,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}L_{2m}(\tau,\xi)\left|F_\alpha u(x,\xi)\right|^2d\tau+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}L_{2p}(\tau,\xi)\left|F_\beta u(x,\xi)\right|^2d\tau+d_1\int_0^d\left|D_x^l u(x,\xi)\right|^2dx+\left(d_2\xi^{2l}+d_3\right)\int_0^d|u(x,\xi)|^2dx=\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right). \tag{9}$$

Заметим, что из условия 1 вытекает (см. [1]) справедливость неравенств

$$\left|L_{2m}(\tau,\xi)\right|\ge M\left(1+|\xi|^2+|\tau|^2\right)^m,\qquad \left|L_{2p}(\tau,\xi)\right|\ge M\left(1+|\xi|^2+|\tau|^2\right)^p,$$

поэтому из (9) получим оценку

$$\sum_{i=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-i}\int_0^d\left|D_\alpha^i u(x,\xi)\right|^2dx+\sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\int_0^d\left|D_\beta^j u(x,\xi)\right|^2dx+\left(1+|\xi|^2\right)^{2l}\int_0^d\left|D_x^{2l}u(x,\xi)\right|^2dx\le c_2\left|\left(f(x,\xi)\right|\right..$$

Для оценки выражения, стоящего в правой части полученного неравенства, воспользуемся очевидным неравенством

$$\left|\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right)\right|\le\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^m\int_0^d|u(x,\xi)|^2dx+\frac{c(\varepsilon)}{\left(1+|\xi|^2\right)^m}\int_0^d|f(x,\xi)|^2dx,\quad \varepsilon>0$$

и выбрать $0<\varepsilon<\frac{1}{2c_2}$. После простых преобразований получим

$$\sum_{i=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-i}\int_0^d\left|D_\alpha^i u(x,\xi)\right|^2dx+\sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\int_0^d\left|D_\beta^j u(x,\xi)\right|^2dx+\left(1+|\xi|^2\right)^{2l}\int_0^d\left|D_x^{2l}u(x,\xi)\right|^2dx\le c_3\int_0^d|f(x,\xi)|^2dx. \tag{10}$$

Теперь для доказательства априорной оценки (7) достаточно в (10) воспользоваться известным неравенством

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2l-i}\left\|D_x^i u(x,\xi)\right\|^2\le\varepsilon^{2(l-i)}\left\|D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|^2+c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2l}\|u(x,\xi)\|^2, \tag{11}$$

где $\|u(x,\xi)\|^2=\int_0^d|u(x,\xi)|^2dx,\quad 0<i<2l,$ а постоянная $c(\varepsilon)$ не зависит от $u(x,\xi)$ и ξ. Лемма доказана.

Лемма 2 [1]. Пусть $v(x)\in C^s[0,d]$. Тогда при любых $\varepsilon>0,\,0<m<s$ справедливо мультипликативное неравенство

$$\left\|D_\alpha^m v(x)\right\|\le\varepsilon^{s-m}\left\|D_\alpha^s v(x)\right\|+c_2\left(\varepsilon^{-m}+\varepsilon^{s-m}\right)\left\|v(x)\right\| \qquad (12)$$

где $c_2>0$ не зависит от $v(x)$ и ε.

Следствие 1 [1]. Пусть $v(x)\in C^{2m}[0,d]$. Тогда при любых $\varepsilon>0,\,0<s<2m,\xi\in R_n$ справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-s}\left\|D_\alpha^s v(x)\right\|^2\le\varepsilon^{2(2m-s)}\left\|D_\alpha^{2m}v(x)\right\|^2+c_2\left(\varepsilon^{-s}+\varepsilon^{2m-s}\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|v(x)\right\|^2\ , \qquad (13)$$

где $c_2>0$ не зависит от $v(x)$ и ε.

Лемма 3. Пусть $0<k<2m$ и $\partial_x\alpha(0)=0$. Тогда для любой функции $w(x)\in C^{2m+1}[0,d]$ справедливо тождество $D_xD_\alpha^k w(x)=D_\alpha^k D_x w(x)+\sum\limits_{j=0}^{k-1}S_j^k(x)D_\alpha^j D_x w(x)+\sum\limits_{j=0}^{k}Q_j^k(x)D_\alpha^j w(x),$ где функции $S_j^k(x)$ и $Q_j^k(x)$ ограничены и зависят лишь от функции $\alpha(x)$ и её производных.

Доказательство леммы не представляет больших трудностей и проводится по индукции.

Лемма 4 [1]. Пусть $0<k<2m$ и $\partial_x\alpha(0)=\partial_x\beta(0)=0$. Тогда для любой функции $w(x)\in C^{2m+1}[0,d]$ справедливо тождество $D_\beta D_\alpha^k w(x)=D_\alpha^k D_\beta w(x)+\sum\limits_{j=0}^{k-1}R_j^k(x)D_\alpha^j D_\beta w(x)+\sum\limits_{j=0}^{k}T_j^k(x)D_\alpha^j w(x),$ где функции $R_j^k(x)$ и $T_j^k(x)$ ограничены и зависят лишь от функций $\alpha(x),\beta(x)$ и их производных, причём $R_j^k(0)=T_j^k(0)=0$.

Для дальнейших оценок введём в рассмотрение функцию $\varphi(x)\in C^\infty[0,d]$ равную числу 1 при $0\le x\le\dfrac{d}{4}$ и равную нулю при $\dfrac{3d}{4}\le x\le d$. Обозначим через $u_1(x,\xi)=\varphi(x)u(x,\xi)$, через $u_2(x,\xi)=(1-\varphi(x))u(x,\xi)$ и рассмотрим скалярное произведение $\left(D_\alpha^{2m}u(x,\xi),D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right)$.

Лемма 5 [1]. Пусть $u(x,\xi)\in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}$. Тогда справедливо представление

$$\left(D_\alpha^{2m}u(x,\xi),D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right)=\left\|D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)\right\|^2+I\left(u_1(x,\xi),u_1(x,\xi)\right)+\int_0^d D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)\cdot\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x,\xi)}\,dx+$$
$$+I\left(u_1(x,\xi),u_2(x,\xi)\right)+\int_0^d D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x,\xi)\cdot\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)}\,dx+J\left(u_2(x,\xi),u_1(x,\xi)\right)+$$
$$+\int_{d/4}^d\alpha^{2m}(x)\beta^{2p}(x)\left|\partial_x^{m+p}u_2(x,\xi)\right|^2dx+I_1\left(u_2(x,\xi)\right)+R\left(u_2(x,\xi)\right), \qquad (14)$$

где для $2\le i+j<4$

$$I\left(u_i(x,\xi),u_j(x,\xi)\right)=\int_0^d D_\beta^p D_\alpha^{2m}u_i(x,\xi)\cdot\overline{D_\beta^p u_j(x,\xi)}\,dx-\int_0^d D_\alpha^{2m}D_\beta^p u_i(x,\xi)\cdot\overline{D_\beta^p u_j(x,\xi)}\,dx\,,$$

$$R\left(u_2(x,\xi)\right)=\sum_{m+p\le\mu\le 2m-1}(-1)^\mu D_\alpha^\mu u_2(x,\xi)\,D_\alpha^{2m-\mu}\cdot\overline{D_\beta^{2p}u_j(x,\xi)}\Bigg|_{x=d/4}^{x=d}\,,$$

$$I_1\left(u_2(x,\xi)\right)=\int_{d/4}^d\sum_{\substack{\mu+\nu\le 2(m+p)-1\\ \mu\le m+p,\ \nu\le m+p}}\Phi_{\mu\nu}(x)\,\partial_x^\mu u_2(x,\xi)\cdot\overline{\partial_x^\nu u_2(x,\xi)}\,dx\,,$$

$\Phi_{\mu\nu}(x)$ – некоторые ограниченные функции. При этом для любого $\varepsilon>0$ имеют место оценки

$$\left|I\left(u_i(x,\xi),u_j(x,\xi)\right)\right|\le\varepsilon\int_0^d\left|D_\alpha^{2m}u_i(x,\xi)\right|^2dx+\varepsilon\int_0^d\left|D_\beta^{2з}u_j(x,\xi)\right|^2dx+c(\varepsilon)\int_0^d\left(\left|u_i(x,\xi)\right|^2+\left|u_j(x,\xi)\right|^2\right)dx,\quad i\ne j, \qquad (15)$$

$$\left|R\left(u_2(x,\xi)\right)\right| \le \varepsilon \int_{d/4}^{d} \left|\partial_x^{2m} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_{d/4}^{d} \left|u_2(x,\xi)\right|^2 dx, \tag{16}$$

$$\left|I_1\left(u_2(x,\xi)\right)\right| \le \varepsilon \int_0^d \left|D_\alpha^{2m} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + \varepsilon \int_0^d \left|D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d \left|u_2(x,\xi)\right|^2 dx. \tag{17}$$

Аналогично лемме 5 устанавливается и следующая лемма 6.

Лемма 6. Пусть $u(x,\xi) \in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}$. Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned}\left(D_\alpha^{2m} u(x,\xi), D_x^{2p} u(x,\xi)\right) &= \left\|D_\alpha^m D_x^l u_1(x,\xi)\right\|^2 + J\left(u_1(x,\xi), u_1(x,\xi)\right) + \int_0^d D_\alpha^m D_x^l u_1(x,\xi) \cdot \overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x,\xi)}\, dx + \\ &+ J\left(u_1(x,\xi), u_2(x,\xi)\right) + \int_0^d D_\alpha^m D_\beta^l u_2(x,\xi) \cdot \overline{D_\alpha^m D_x^l u_1(x,\xi)}\, dx + J\left(u_2(x,\xi), u_1(x,\xi)\right) + \\ &+ \int_{d/4}^d \alpha^{2m}(x) \left|\partial_x^{m+l} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + J_1\left(u_2(x,\xi)\right) + T\left(u_2(x,\xi)\right),\end{aligned} \tag{18}$$

где для $2 \le i + j < 4$

$$J\left(u_i(x,\xi), u_j(x,\xi)\right) = \int_0^d D_x^l D_\alpha^{2m} u_i(x,\xi) \cdot \overline{D_x^l u_j(x,\xi)}\, dx - \int_0^d D_\alpha^{2m} D_x^l u_i(x,\xi) \cdot \overline{D_x^l u_j(x,\xi)}\, dx,$$

$$T\left(u_2(x,\xi)\right) = \sum_{m+l \le \mu \le 2m-1} (-1)^\mu D_\alpha^\mu u_2(x,\xi)\, D_\alpha^{2m-\mu} \cdot \overline{D_x^{2l} u_j(x,\xi)} \Bigg|_{x=d/4}^{x=d},$$

$$J_1\left(u_2(x,\xi)\right) = \int_{d/4}^d \sum_{\substack{\mu+\nu \le 2(m+l)-1 \\ \mu \le m+l,\ \nu \le m+l}} \Psi_{\mu\nu}(x)\, \partial_x^\mu u_2(x,\xi) \cdot \overline{\partial_x^\nu u_2(x,\xi)}\, dx,$$

$\Psi_{\mu\nu}(x)$ – некоторые ограниченные функции. При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеют место оценки

$$\left|J\left(u_i(x,\xi), u_j(x,\xi)\right)\right| \le \varepsilon \int_0^d \left|D_\alpha^{2m} u_i(x,\xi)\right|^2 dx + \varepsilon \int_0^d \left|D_x^{2l} u_j(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d \left(\left|u_i(x,\xi)\right|^2 + \left|u_j(x,\xi)\right|^2\right) dx, \quad i \ne j, \tag{19}$$

$$\left|T\left(u_2(x,\xi)\right)\right| \le \varepsilon \int_{d/4}^d \left|\partial_x^{2m} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_{d/4}^d \left|u_2(x,\xi)\right|^2 dx, \tag{20}$$

$$\left|J_1\left(u_2(x,\xi)\right)\right| \le \varepsilon \int_0^d \left|D_\alpha^{2m} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + \varepsilon \int_0^d \left|D_x^{2l} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d \left|u_2(x,\xi)\right|^2 dx. \tag{21}$$

Лемма 7. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для функции $u(x,\xi) \in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}$, являющейся решением задачи (4) – (6), выполнена оценка

$$\left\|D_x^{2l} u(x,\xi)\right\|^2 \le \varepsilon\left(\left\|D_\alpha^{2m} u(x,\xi)\right\|^2 + \left\|D_\beta^{2p} u(x,\xi)\right\|^2\right) + c(\varepsilon) \left\|f(x,\xi)\right\|^2, \tag{22}$$

с постоянной $c(\varepsilon) > 0$, не зависящей от $u(x,\xi)$, $f(x,\xi)$.

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (4) на $D_x^{2l} u(x,\xi)$. После элементарных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} &a_1 \operatorname{Re}\left(D_\alpha^{2m} u(x,\xi), D_x^{2l} u(x,\xi)\right) + b_1 \operatorname{Re}\left(D_\beta^{2p} u(x,\xi), D_x^{2l} u(x,\xi)\right) + d_1 \left\|D_x^{2l} u(x,\xi)\right\|^2 = \\ &= \operatorname{Re}\left(f(x,\xi), D_x^{2l} u(x,\xi)\right) - \left(a_2 \xi^{2m} + a_3 + b_2 \xi^{2p} + b_3 + d_2 \xi^{2l} + d_3\right) \operatorname{Re}\left(u(x,\xi), D_x^{2l} u(x,\xi)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Для оценки слагаемых, стоящих в правой части равенства (23), применим неравенство

$$\left|\int_0^d \varphi(x) \psi(x)\, dx\right| \le \varepsilon \int_0^d |\varphi(x)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d |\psi(x)|^2 dx, \quad \varepsilon > 0. \tag{24}$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} &a_1 \operatorname{Re}\left(D_\alpha^{2m} u(x,\xi), D_x^{2l} u(x,\xi)\right) + b_1 \operatorname{Re}\left(D_\beta^{2p} u(x,\xi), D_x^{2l} u(x,\xi)\right) + d_1 \left\|D_x^{2l} u(x,\xi)\right\|^2 \le \\ &\le \varepsilon \left\|D_x^{2l} u(x,\xi)\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(\left\|f(x,\xi)\right\|^2 + \left(a_2 \xi^{2m} + a_3 + b_2 \xi^{2p} + b_3 + d_2 \xi^{2l} + d_3\right) \left\|u(x,\xi)\right\|^2\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Учитывая представление (18) и оценки (7), (19) – (21), из (25) получим неравенство

$$\left\|D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|^2 \le \varepsilon_1\left(\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|^2+\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|^2\right)+c(\varepsilon_1)\left\|f(x,\xi)\right\|^2+$$

$$+c_4\left|\int_{d/4}^{d}D_\alpha^m D_x^l u_1(x,\xi)\cdot\overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x,\xi)}\,dx\right|+c_5\left|\int_{d/4}^{d}D_\beta^p D_x^l u_1(x,\xi)\cdot\overline{D_\beta^p D_x^l u_2(x,\xi)}\,dx\right|. \qquad (26)$$

Чтобы завершить доказательство леммы 7, достаточно заметить, что подынтегральное выражение в правой части последнего неравенства $D_\alpha^m D_x^l u_1(x,\xi)\cdot\overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x,\xi)}$ и $D_\beta^p D_x^l u_1(x,\xi)\cdot\overline{D_\beta^p D_x^l u_2(x,\xi)}$ содержат соответственно произведения производных от функции $u(x,\xi)$ только до порядка $m+l<2m$ и до порядка $p+l<2p$, поэтому сами интегралы, с учётом оценок (24), (11), (7), могут быть оценены следующим образом

$$\left|\int_{d/4}^{d}D_\alpha^m D_x^l u_1(x,\xi)\cdot\overline{D_\alpha^m D_x^l u_2(x,\xi)}\,dx\right|+\left|\int_{d/4}^{d}D_\beta^p D_x^l u_1(x,\xi)\cdot\overline{D_\beta^p D_x^l u_2(x,\xi)}\,dx\right|\le\varepsilon_2\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|^2+c(\varepsilon_2)\left\|f(x,\xi)\right\|^2,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 8. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда при любом $\varepsilon>0$ для функции $u(x,\xi)\in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}$, являющейся решением задачи (4) – (6), выполнена оценка

$$\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|^2\le\varepsilon\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|^2+c(\varepsilon)\left\|f(x,\xi)\right\|^2, \qquad (27)$$

с постоянной $c(\varepsilon)>0$, не зависящей от $u(x,\xi),\ f(x,\xi)$.

Для установления справедливости леммы 8 нужно скалярно умножить уравнение (4) на $D_\beta^{2p}u(x,\xi)$ и дальнейшее доказательство провести аналогично доказательству леммы 7. Заметим лишь, что при этом вместо леммы 6 следует использовать лемму 5.

Теорема. Пусть выполнены условия 1, 2 и $F(x,y)\in L_2(D)$. Тогда для функций $u(x,\xi)\in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}$ и $U(x,y)\in H_{\alpha,\beta}^{2m,2p,2l}$, являющихся соответственно решениями задач (4) – (6) и (1) – (3), выполнены априорные оценки

$$\sum_{j=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_\alpha^j u(x,\xi)\right\|^2+\sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\left\|D_\beta^j u(x,\xi)\right\|_0^2+\sum_{j=0}^{2l}\left(1+|\xi|^2\right)^{2l-j}\left\|D_\beta^j u(x,\xi)\right\|_0^2\le c\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2, \qquad (28)$$

$$\left\||U(x,y)\right\|^2\le c\iint_D\left|F(x,y)\right|^2\,dxdy \qquad (29)$$

с постоянной $c>0$ не зависящей от $u(x,\xi),\ f(x,\xi), U(x,y),\ F(x,y)$.

Доказательство теоремы вытекает из лемм 1, 7, 8 и следствия 1. Действительно, из уравнения (4) оценим $\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0$. Имеем

$$\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|\le c_6\left(\left\|f(x,\xi)\right\|+\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|+\left\|D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|+\left(1+|\xi|^{2m}\right)\left\|u(x,\xi)\right\|\right).$$

Для оценки слагаемых, стоящих в правой части последнего неравенства, применим следствие 1 и леммы 1, 7, 8. Получим

$$\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|+c(\varepsilon)\left\|f(x,\xi)\right\|. \qquad (30)$$

Выбирая в оценке (30) $\varepsilon>0$ достаточно малым, выводим неравенство

$$\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|\le c_7\left\|f(x,\xi)\right\|,$$

которое вместе с (7), (13), (22) и (27) приводит к оценке (28).

Оценка (29) вытекает из неравенства (28) после интегрирования его по $\xi\in R_n$ и теорема тем самым доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197.

Список литературы
References

1. Глушак А.В. 2017. Априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №20 (269). Выпуск 48: 50–57.

Glushak A.V. 2017. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №20 (269), issue 48: 50–57.

2. Глушак А.В. 2017. Разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, № 27 (276). Вып. 49: 5–14.

Glushak A.V. 2017. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, № 27 (276), issue 48: 5–14.

3. Глушко В.П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Деп. ВИНИТИ № 1049-79 Деп., 47.

Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. Dep. VINITI № 1049-79 Dep., 47.