УДК 517.9
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-40-46

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ВЕКУА-ПОМПЕЙЮ

THE VEKUA– POMPEIU GENERALIZED OPERATOR

О.В. Чернова
O.V. Chernova

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod State University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: chernova_olga@bsu.edu.ru

Аннотация
В статье рассматривается обобщенный интеграл Векуа−Помпейю в классе вектор−функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым весом. Доказано, что такой интеграл при некоторых условиях на плотность непрерывно дифференцируем и является решением обобщенной системы Коши−Римана. Сформулирована теорема о том, что при определенных условиях на показатель Гельдера соответствующий интегральный оператор ограничен в пространствах Гельдера с весом, обратим, и обратным к нему служит обобщенный оператор системы Коши−Римана.

Abstract
In the article we consider the generalized integral of the Vekua−Pompeiu integral for vector functions from Hölder continuously differentiable class with a weight. It is proved that this integral under certain conditions on a density is continuously differentiable, and it is a solution of the generalized Cauchy−Riemann system. A theorem is declared that for some restrictions on a Hölder power the corresponding integral operator is bounded in Hölder spaces with a certain weight, it is invertible and its inverse is generalized operator Cauchy−Riemann system.

Ключевые слова: обобщенный интеграл Векуа−Помпейю, весовое пространство Гельдера, система Коши−Римана, компактное вложение.
Keywords: The Vekua−Pompeiu generalized integral, weighted Hölder space, the Cauchy−Riemann system, compact embedding.

Функционально−теоретические методы и интегральные представления различных классов функций играют важную роль при исследовании многих краевых задач теории функции комплексного переменного (см., например, [1,2,3]). Настоящая работа связана со специальной системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, обобщающей систему Коши−Римана, для исследования которой широко используются упомянутые методы.

Пусть $\boldsymbol{C}$−комплексная плоскость. Рассмотрим неоднородное уравнение Коши−Римана

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f, \tag{1}$$

где использовано обычное обозначение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Хорошо известно [2, стр. 29], что если функция f непрерывно дифференцируема по x, y и удовлетворяет оценке

$$|f(z)| = O(|z|^{\delta}) \text{ , при } z = x + iy \to \infty \tag{2}$$

с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\boldsymbol{C}} \frac{f(t)d_2t}{t-z},$$

где здесь и ниже d_2t означает элемент площади, непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1). Отметим, что оценка (2) предполагается справедливой и для $l-$ вектор–функций.

Интеграл в правой части этого равенства носит название Векуа–Помпейю. Удобно его снабдить дополнительным множителем $\frac{1}{2i}$, полагая

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{C}} \frac{f(t)d_2t}{t-z},$$

тогда имеем равенство $LTf = f$ по отношению к оператору

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x} = -2i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Пусть матрица $J \in \boldsymbol{C}^{l\times l}$ постоянна и ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости, $Im\,\lambda > 0$. С каждым комплексным числом $z = x + iy \in \boldsymbol{C}$ свяжем $l\times l-$ матрицу

$$z_J = x \cdot 1 + y \cdot J,\ x, y\ \in \boldsymbol{R}$$

собственными значениями которой служат числа $x + \lambda y$, где $\lambda \in \sigma(J)$, а 1 – единичная матрица. Отметим важное матричное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} t_J^{-1}dt_J = 1, \tag{3}$$

где, как и выше, 1– единичная матрица.

Введем обобщенный интеграл Векуа–Помпейю по формуле

$$(T_Jf)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{C}} (t-z)_J^{-1}f(t), \tag{4}$$

По отношению к оператору

$$L_J = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x} \tag{5}$$

справедлив следующий результат.

Лемма 1. *Пусть $l-$вектор–функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема по x, y и удовлетворяет оценке (2) с некоторым $\delta < -1$. Тогда $l-$вектор–функция $\phi = T_J f$ также непрерывно дифференцируема и является решением уравнения $L_J\phi = f$.*

Доказательство. Пусть z меняется в некотором круге $|z - z_0| < r$. Если функция f обращается в нуль в этом круге, то равенство (4) можно дифференцировать под знаком интеграла и соотношение

$$(L_J T_J f)(z) = f(z) \tag{6}$$

для $|z - z_0| < r$ проверяется непосредственно. Поэтому не ограничивая общности можно считать, что функция f имеет компактный носитель. Тогда существует такое $R > 0$, что $f(t+z) = 0$ при $|t| \geq R$ и $|z - z_0| < r$. Поэтому равенство (4) для $\phi = T_J f$ можно переписать в форме

$$\phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{C}} t_J^{-1}f(t+z)d_2t,$$

и его можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{C}} t_J^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(t+z)d_2t, \quad \frac{\partial\phi(z)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{C}} t_J^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(t+z)d_2t, \tag{7}$$

Рассмотрим двумерный сингулярный интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{C}} t_J^{-2} f(z+t)d_2t \tag{8}$$

понимаемый как предел при $\varepsilon\to 0$ интегралов по $\{|t|\geq\varepsilon\}$. Поскольку

$$\int_{|t|=1} t_J^{-2}d_1t = 0, \tag{9}$$

где d_1t есть элемент длины дуги, необходимое условие существования таких интегралов выполнено. В справедливости равенства (9) проще всего убедится с помощью функции

$$\chi(\lambda) = \int_0^{2\pi}(\cos\theta + \lambda\sin\theta)^{-2}d\theta,$$

аналитической в верхней полуплоскости $Im\,\lambda > 0$ [4].

Полагая $t = t_1 + it_2$, $z = x_1 + ix_2$ и пользуясь формулой Грина, получим:

$$\int_{|t|\geq\varepsilon} t_J^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}(z+t)d_2t = \int_{|t|\geq\varepsilon} t_J^{-1}\frac{\partial f}{\partial t_k}(z+t)d_2t =$$
$$= \int_{|t|\geq\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t_k}(t_J^{-1})f(t+z)d_2t - \int_{|t|=\varepsilon} n_k(t)t_J^{-1}f(t+z)d_1t.$$

Здесь $n = n_1 + in_2 = -t/|t|$ есть единичная внешняя нормаль к области $|t| > \varepsilon$.

Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(t_J^{-1}) = -t_J^{-2}, \quad \frac{\partial}{\partial t_2}(t_J^{-1}) = -t_J^{-2}J.$$

Поэтому переходя в предыдущих равенствах к пределу при $\varepsilon\to 0$, в обозначениях (7) получим

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -F(z) - \sigma_1 f(z), \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -JF(z) - \sigma_2 f(z), \tag{10}$$

где коэффициенты $\sigma_k \in \boldsymbol{C}^{l\times l}$ определяются формулами

$$\sigma_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} t_J^{-1}t_1d_1t, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} t_J^{-1}t_2d_1t.$$

Поскольку $t_1d_1t = dt_2$, $t_2d_1t = -dt_1$, разность $t_2d_1t - Jt_1d_1t = -dt_J$. С учетом (3) отсюда

$$\sigma_2 - J\sigma_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} t_J^{-1}dt_J = 1,$$

что совместно с (10) завершает доказательство равенства (6) и леммы.

Распространим лемму 1 на функции, которые принадлежат классу $C^{\mu}(K)$ на любом компакте $K \subseteq \boldsymbol{C}$ и имеют поведение (2) на бесконечности с фиксированным $\delta \in \boldsymbol{R}$. С этой целью для неограниченного множества E на плоскости обозначим $C^{\mu}_{\mu}(E,\infty)$ класс функций, удовлетворяющих на этом множестве условию Гельдера с показателем μ, т.е. функций φ с конечной полунормой

$$[\varphi]_{\mu} = \sup_{z_1\neq z_2}\frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\mu}},$$

где верхняя грань берется по точкам $z_j \in E$.

Нетрудно видеть, что эти функции удовлетворяют (2) с $\delta=\mu$. Исходя из произвольного δ, обозначим $C^{\mu}_{\delta}(E,\infty)$ класс функций φ, для которых $\psi(z)=(1+|z|)^{\mu-\delta}\varphi(z)\in C^{\mu}_{\mu}(E,\infty)$. Очевидно, функция φ имеет поведение (2) на бесконечности и относительно нормы

$$|\varphi|=\sup_{z\in E}|(1+|z|)^{-\delta}\varphi(z)|+[\psi]_{\mu}$$

введенное пространство банахово.

Если множество E является замкнутой областью $\overline{D}$, то под $C^{1,\mu}_{\delta}(\overline{D},\infty)$ понимается класс непрерывно дифференцируемых в D функций φ, для которых

$$\varphi\in C^{\mu}_{\delta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\in C^{\mu}_{\delta-1}. \tag{11}$$

Заметим, что семейство пространств C^{μ}_{δ} монотонно убывают по μ и возрастают по δ относительно вложения. Эти пространства подробно описаны в [3 стр 77, 83] (в несколько более общей ситуации нескольких особых точек). Отметим несколько их свойств.

Лемма 2. (a) *Пусть* $0<2r<R$ *и* $B=\{|z|\le R\}$, $K=\{r\le|z|\le R\}$, *так что вместе с кругом* B *последовательность колец* $\{2^i z, z\in K\}$, $i=0,1,\ldots$, *покрывает всю плоскость. В этих обозначениях функция* $\varphi\in \mathrm{C}^{\mu}_{0}(\boldsymbol{C},\infty)$ *тогда и только тогда, когда она принадлежит классу* $C^{\mu}(B)$ *для любого* R *и норма*

$$|\varphi|=|\varphi|_{C^{\mu}(B)}+\sup_{i\ge 0}|\varphi(2^i z)|_{C^{\mu}(K)}$$

конечна. При этом данная норма эквивалентна норме пространства C^{μ}_{0}.

(b) *Пусть* $r<0$ *и частные производные*

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\varphi_2=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

принадлежат классу $\mathrm{C}^{\mu}_{\delta-1}(\boldsymbol{C},\infty)$. *Тогда функция* $\varphi\in\mathrm{C}^{1,\mu}_{\delta}(\boldsymbol{C},\infty)$ *и справедлива оценка*

$$|\varphi|_{C^{\mu}_{\delta}}\le C(|\varphi(0)|+|\varphi_1|_{C^{\mu}_{\delta-1}}|+|\varphi_2|_{C^{\mu}_{\delta-1}}).$$

Сформулируем теперь основной результат для операторов (4), (5). Предварительно заметим, что по определению (11) дифференциальный оператор L_J ограничен $\mathrm{C}^{1,\mu}_{\delta}(\boldsymbol{C},\infty)\to\mathrm{C}^{\mu}_{\delta-1}(\boldsymbol{C},\infty)$.

Теорема. *При* $-1<\delta<0$ *интегральный оператор* T_J *ограничен* $\mathrm{C}^{\mu}_{\delta-1}(\boldsymbol{C},\infty)\to\mathrm{C}^{1,\mu}_{\delta}(\boldsymbol{C},\infty)$, *обратим и обратным к нему служит* L_J.

Доказательство. Пусть $f\in C^{1,\mu}_{\delta-1}$ и $\phi=T_J f$. Рассмотрим сингулярный оператор

$$(S^2_J f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}(t-z)^{-2}_{J}\varphi(t)d_2t,$$

который может быть записан и в форме (8). Согласно лемме 1 частные производные функции ϕ связаны с функцией $F=S^2_J f$ соотношениями (7). Поэтому с учетом леммы 2(b) утверждение теоремы об ограниченности оператора T_J сводится к доказательству ограниченности сингулярного оператора S^2_J в пространстве $C^{\mu}_{\delta-1}$.

Покажем, что этот оператор ограничен в C^{μ}_{δ} при $-2<\delta<0$. В основе лежит известная теорема Корна–Жиро [5]. Пусть $0<r_0<r$ и $B_0=\{|z|\le r_0\}$, $B=\{|z|\le r\}$. Тогда по этой теореме для $\varphi\in C^{\mu}(B)$ сингулярный интеграл

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_B (t-z)_J^{-2}\varphi(t)d_2 t, \quad z \in B_0,$$

определяет функцию $\phi_0 \in C^\mu(B_0)$ с соответствующей оценкой

$$|\phi_0|_{C^\mu(B_0)} \le C|\varphi|_{C^\mu(B)}, \tag{12}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от r_0 и r.

Применим этот факт к интегралу $\phi = S_J^2\varphi$ с плотностью $\varphi \in C_\delta^\mu(\boldsymbol{C}, \infty)$. Разобьем его на сумму $\phi_0 + \phi_1$, где ϕ_0 определяется интегрированием по B. Очевидно, функция ϕ_1 непрерывно дифференцируема в круге и для нее справедлива очевидная оценка

$$|\phi_1|_{C^\mu(B_0)} \le C\sup_{|z|\ge r}[|z|^{-\delta}|\varphi(z)|],$$

где здесь и ниже C означает различные положительные постоянные, не зависящие от φ. В результате совместно с (12) приходим к оценке

$$|\phi|_{C^\mu(B_0)} \le C|\varphi|_{C_\delta^\mu(\mathrm{C},\infty)}.$$

Поэтому достаточно убедиться, что ϕ принадлежит классу $C_\delta^\mu(B_{0'},\infty)$ в области $B_{0'} = \{|z| \ge r_0\}$ с соответствующей оценкой норм.

В соответствии с определением пространства C_δ^μ дело сводится к доказательству того, что для $\varphi \in C_0^\mu(B_{0'},\infty)$ функция

$$\psi(z) = \int_{|t|\ge r_0} \frac{|t|^r}{|z|^r}(t-z)_J^{-2}\varphi(t)d_2 t, \quad |z| \ge r, \tag{13}$$

принадлежит классу $C_0^\mu(B',\infty)$, где $B' = \{|z| \ge r\}$, с соответствующей оценкой

$$|\psi|_{C_0^\mu(B',\infty)} \le C|\varphi|_{C_0^\mu(B_{0'},\infty)}. \tag{14}$$

С этой целью выберем положительные R_0, R по условию $2r < R < R_0$ и положим $K = \{r \le |z| \le R\}$, $K_0 = \{r_0 \le |z| \le R_0\}$. На основании теорема Корна–Жиро аналогично предыдущему убеждаемся, что

$$|\psi|_{C^\mu(K)} \le C[\sup_t|\varphi(t)| + |\varphi|_{C^\mu(K_0)}]. \tag{15}$$

Согласно (15) для любого $i = 1,2,\ldots$ можем записать

$$\psi(2^i z) = \int_{|t|\ge 2^{-i}r_0} \frac{|t|^\delta}{|z|^\delta}(t-z)_J^{-2}\varphi(2^i t)d_2 t, \quad z \in K,$$

Поэтому имеем аналогичную (15) оценку

$$|\psi(2^i z)|_{C^\mu(K)} \le C[\sup_t|\varphi(t)| + |\varphi(2^i t)|_{C^\mu(K_0)}],$$

так что и

$$\sup_i|\psi(2^i z)|_{C^\mu(K)} \le C[\sup_t|\varphi(t)| + \sup_i|\varphi(2^i t)|_{C^\mu(K_0)}],$$

В соответствии с леммой 2(a) отсюда следует оценка (15), завершающая доказательство ограниченности оператора S_J^2.

Что касается второй части теоремы, то пусть $\phi \in C^{1,\mu}(\boldsymbol{C}, \infty)$ и $f = L_J\phi$. Тогда в силу (6) имеем равенство

$$\phi = T_J f + \phi_0, \tag{16}$$

где функция $\phi_0 \in C^{1,\mu}(\boldsymbol{C},\infty)$ удовлетворяет уравнению $L_J\phi_0 = 0$, т.е. является J – аналитической на всей плоскости. Поскольку она исчезает на бесконечности, в действительности она тождественно равна нулю. Этот факт составляет аналог теоремы Лиувилля для рассматриваемых вектор–функций и с помощью формулы Коши доказывается совершенно аналогично.

В самом деле, при $|z|>r>0$ в области $|t|>r$ можем к функции ϕ_0 применить формулу Коши

$$\phi_0(z)=\int_{|t|=r} dt_J(t-z)_J^{-1}\phi_0(t)dt.$$

При $r\to 0$ интеграл здесь стремится к нулю, так что $\phi_0(z)=0$ для всех z.

Итак, (16) в действительности означает равенство $\phi=T_J f$, где напомним $f=L_J\phi$. Таким образом, вместе с (6) имеем аналогичное соотношение $T_J L_J\phi=\phi$, справедливое для любых $\phi\in C_\delta^{1,\mu}$, $-1<\delta<0$, так что операторы T_J и L_J действительно взаимно обратны.

Интегральный оператор (4) можно ввести и для областей D на плоскости, ограниченных гладким контуром *Г*. Однако вопрос об его ограниченности в пространствах C^μ и C_δ^μ требует определенной гладкости *Г*. Чтобы обойти этот вопрос, воспользуемся оператором P продолжения функций $\varphi\in C(\overline{D})$ на всю плоскость. Этот оператор построим сначала локально для функций φ, обращающихся в нуль вне некоторой окрестности фиксированной граничной точки $t_0=x_0+iy_0\in\Gamma$.

При достаточно малом $\rho>0$ пересечение *Г* с кругом $B_0=\{|z-t_0|<\rho\}$ представляет собой гладкую дугу, которая является графиком некоторой функции $f\in C^1[a,b]$, т.е. либо графиком $y=f(x), a\le x\le b$, либо графиком $x=f(y), a\le y\le b$. Пусть для определенности имеет место первый случай, так что $y_0=f(x_0)$, и $\varepsilon>0$ выбрано столь малым, что область D_0, определяемая в декартовых координатах $z=x+iy$ неравенствами $|x-x_0|<\varepsilon,\ \ |y-f(x)|<\varepsilon$, содержится в круге B_0. Граница области $D_0\cap D$ составлена из гладкой дуги Γ_0, определяемой уравнением $y=f(x), |x-x_0|\le\varepsilon$, и соответствующей кусочно–гладкой дуги Γ_0^-, которая за исключением своих концов содержится в D.

Не ограничивая общности можно считать, что f продолжена до функции $f\in C^1(\boldsymbol{R})$ с компактным носителем. Рассмотрим преобразование $\xi+i\eta=\alpha(x+iy)$ плоскости на себя по формуле $\xi=x, \eta=y-f(x)$. Очевидно, оно обратимо и обратное преобразование $\beta=\alpha^{-1}$ действует по аналогичной формуле $x=\xi, y=\eta+f(\xi)$. В окрестности ∞ эти преобразования являются тождественными. Поскольку они непрерывно дифференцируемы, отсюда следует, что для некоторой постоянной $M>1$ и любых точек $z_1\ne z_2$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{M}\le\frac{|\alpha(z_1)-\alpha(z_2)|}{|z_1-z_2|}\le M. \tag{17}$$

Пусть теперь функция φ принадлежит $C^\mu(D\cap D_0)$ и обращается в нуль в окрестности дуги Γ_0^-. Положим $\psi(\zeta)=\varphi[\beta(\zeta)],\ \ \zeta\in\alpha(D\cap D_0)$, и продолжим ее до функции $\tilde\psi$ сначала нулем на соответствующую полуплоскость, а затем на всю плоскость по правилу $\tilde\psi(\xi+i\eta)=\tilde\psi(\xi-i\eta)$. Тогда равенство

$$(P_0\varphi)(z)=\tilde\psi[\alpha(z)]$$

определяет требуемый оператор продолжения, поскольку сужение функции $\tilde\varphi=P_0\varphi$ на $D\cap D_0$ совпадает с φ.

Легко видеть, sup– нормы функций ψ и $\tilde\psi$ совпадают, а их полунормы

$$[\varphi]_\mu = sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}$$

связаны соотношением $[\tilde{\psi}]_\mu \leq 2[\psi]_\mu$. В силу (17) имеем аналогичные неравенства $[\psi]_\mu \leq M[\varphi]_\mu$ и $[\tilde{\varphi}]_\mu \leq M[\tilde{\psi}]_\mu$. В результате приходим к оценке

$$|P_0\varphi|_{C^\mu(\mathrm{C})} \leq 2M^2 |\varphi|_{C^\mu(D\cap D_0)} . \tag{18}$$

Из (18) и построения видно также, что

$$(P_0\varphi)(z) = 0, \quad |z - z_0| \geq M^2\rho. \tag{19}$$

В силу компактности контур Γ можно покрыть конечным числом областей $D_1,\ldots,D_n$ того же типа, что и D_0. Пусть P_k – оператор продолжения, отвечающий D_k. Выберем разбиение единицы – семейство функций $\chi_k \in C^1(D_k)$, $1 \leq k \leq n$, и $\chi \in C^1(D)$, таких, что $\chi_k = 0$ в окрестности ∂D_k, функция $\chi = 0$ в окрестности Γ и сумма

$$\sum_{k=1}^n \chi_k(z) + \chi(z) = 1, \quad z \in D.$$

Тогда формула

$$P\varphi = \sum_{k=1}^n P_k(\chi_k\varphi) + \chi\varphi$$

определяет требуемый оператор продолжения, поскольку для $z \in D$ имеем равенства $(P_k\chi_k\varphi)(z) = (\chi_k\varphi)(z)$ и, следовательно,

$$(P\varphi)(z) = \sum_{k=1}^n (\chi_k\varphi)(z) + (\chi\varphi)(z) = \varphi(z).$$

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю проф. А.П. Солдатову за ценные советы и рекомендации по написанию и оформлению статьи.

Список литературы
References

1. Begehr H.G.W. 1994. Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong.-World Scientific.

2. Векуа И.Н. 1988. Обобщенные аналитические функции., 2-е изд., М.,Наука.

Vekua I. N. 1988. Generalized analytic functions, 2nd ed., M., Nauka.

3. Солдатов А.П. 2017. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 63: 1-189.

Soldatov A.P. 2017. Singular integral operators and elliptic boundary value problems. Modern problems of mathematics. Fundamental directions, 63: 1-189.

4. Ващенко О.В., Солдатов А.П. 2006. Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами. Научные ведомости, БелГУ, выпуск 2, № 1(21), серия «Информатика и прикладная математика»: 3-6.

Vaschenko O.V., Soldatov A.P. 2006. An integral representation of solutions of the generalized Beltrami system. Scientific bulletins, BelGU, Issue 2, №.1 (21), "Informatics and Applied Mathematics": 3-6.

Bers L., John A. and Schechter M. 1964. Partial Differential Equations. Intersience Publishers. New York London Sydney.